新しい解析学の流れ

ランダムウォークとくりこみ群

―確率論から数理物理学へ―

服部　哲弥／著

共立出版

シリーズ「新しい解析学の流れ」発刊にむけて

「解析学」は現象の分析・解析に源を持つ数学の分野であり，古典力学を背景とした17世紀のニュートンによる微分・積分法の創始にも代表されるように，物理学と深い関係を持ちながら発展してきた数学である．さらに19世紀のコーシーらの研究をはじめ，解析学は極限などの「無限」を理論的に扱う数学の分野としても特徴づけられる．20世紀にはさまざまな抽象概念が導入され，解析学は深まりを見せる一方で，代数学や幾何学との結び付きを深める解析学の分野も成長し，さらに確率論も加わって多様な進歩を遂げている．

他の学問との関わりでは，特に20世紀後半には物理学はもとより工学や化学・生物学・経済学・医学など，多様な分野に現れる種々の非線形現象の分析・解析・数理モデル化との関わりも深めてきた．さらに計算機の飛躍的な進歩により，それまでには扱うことのできなかった複雑な対象への取り組みも可能となっている．このような計算機を援用した新たな取り組みの中で，新しい時代の解析学が芽生える一方，解析学の研究で得られた成果が数値計算などを通して多くの応用分野を支えるに至っている．

このような解析学を取り巻く状況変化の中で，21世紀における「解析学」の新しい流れを我が国から発信することが，このシリーズの目的である．これは過去の叡知の上に立って，夢のある将来の「解析学」像を描くことである．このため，このシリーズでは新たな知見の発信と共に先人の得た成果を「温故知新」として見直すことも並行して行い，さらには海外の最新の知見の紹介も行いたいと考えている．したがって本シリーズでは，新たな良書の書き下ろしはもちろんのこと，20世紀に出版された時代を越えた名著を復刊して後世に残し，さらには海外の最新の良書の翻訳を行う予定である．また，最先端の専門家向けの高度な内容の書物を出版する一方で，これからの解析学の発展を担う若い学生を導くためのテキストレベルの書物の出版も心掛けていく予定である．

まえがき

くりこみ群は1970年代頃から最初は理論物理学において始まった言葉で，早い段階から数学でも関心が集まったようである．だが，一方には難しい系を扱う専門的な研究があり，他方には標語的な解説があるが，興味を持った初学者が勉強を始められるような，数学的に完成度を保った，しかし，いきなり難しい対象に深入りはしない数学の教科書が見つからないように思えた．

本書では，path 上の確率測度あるいは確率連鎖の紹介から始めて，その題材の中でくりこみ群を初等的に説明することを主目的としている．Path 上の確率測度を題材に選んだのは，くりこみ群の本質を損なわない範囲でもっとも簡単な対象によって，くりこみ群の考え方を数学的に説明するためである．

株価の変動や雑音の影響のような時間とともに複雑に変化する対象を研究する概念として確率過程がある．複雑に変化するとは，個々の具体的な時間変化を精密詳細に追うことが現実的でないが，変化の全体的な様子に興味があるということであり，特に，いたるところぎざぎざした微分不可能な関数が念頭にある．また，全体の様子を定量的に調べるには確率測度を用いること，すなわち求める性質を持つ対象の集合の大きさを測ること，が自然である．時間の関数の集合の上の確率測度を確率過程と言う．時間が連続的な場合と離散的な場合を分けて前者を確率過程，後者を確率連鎖と呼び分けることもある．前者の代表的な例としてブラウン運動があり，後者の代表的な例として単純ランダムウォークがある．両者は無関係ではなく，ブラウン運動は単純ランダムウォークの連続極限，逆に言えば単純ランダムウォークはブラウン運動の離散時間近似，である．ブラウン運動のように時間が連続的な確率過程は数学的に強力な結果を得ることができるが，相応の数学的準備が必要である．関数の複雑さという側面を理解するためならば離散時間で長い時間の漸近的な振る舞いを考えればよい．ブラウン運動のサンプルは連続

関数であり，ランダムウォークはその離散近似なので，1 歩ごとにそれまでいた場所の近くの点に移る．このような，離散的な時刻の上の関数であって短い時間では極端な変化のないものを本書では path と呼ぶことにする．本書は path 上の確率測度に題材を限定する．連続極限については原著論文に譲って本書では割愛するが，本書の主目的であるくりこみ群は連続極限と相性が極めてよいので，確率連鎖について解説すれば，連続極限として得られる確率過程に対するくりこみ群を理解することは可能である．

ブラウン運動や単純ランダムウォークはマルコフ性という重要な性質を持つ．マルコフ性は，確率過程ないし確率連鎖のある時刻から未来に向かっての挙動が，過去の経緯に無関係に現在時刻の位置だけで決まる性質を言う．現実の複雑な現象にはマルコフ性があると考えてよいものもあるが，過去の影響を長く引きずると考えられるものも多い．本書は過去の影響を長く引きずる現象の典型として self-avoiding path を取り上げて，その「ぎざぎざの度合い」について単純ランダムウォークと対比しながら紹介する．Self-avoiding path とは，一度通った点は二度と通らないという条件を課した path の集合，またはその上の確率測度，を指す．二度と通らないという条件を歩数方向にながめると初期時刻以降の全ての影響を常に引きずるのでマルコフ性がない．

単純ランダムウォークと self-avoiding path に共通する特徴は，典型的な path がいずれも，歩数が十分大きいときに，path の全体像に比べて「ぎざぎざ」していることである．くりこみ群は、ぎざぎざした関数の上の確率測度を扱う一つの視点を提供する．くりこみ群はマルコフ性の有無と無関係な手法であって，非マルコフ的な確率過程に対して有効であることが期待されるし，実際本書でもその有効性の一端を紹介する．本書では，path がぎざぎざしていることに由来する漸近的性質として，1 次元ランダムウォークの場合によく知られている重複対数の法則を多くの 1 次元確率連鎖に一般化すること，および，変位 (displacement, end-to-end distance) の指数の d 次元 gakset 上の self-avoiding path への一般化，の 2 点を特に詳しく議論する．中心極限定理でよく知られた指数 1/2 と異なる指数を持つ確率連鎖（必然的に独立な変数の和ではなく，強い従属関係にある変数の和となる）に一般化する点で，中心極限定理を熟知する読者には視点の転換を与えると考える．

くりこみ群とは，「精度のスケール変換（細かい構造をならしたり付け加えたりする操作)」に対する元の系（本書では path 上の測度）の応答を適当なパラメータ空間の上で記述した力学系であって，その固定点近傍の振る舞いが系の漸近的性質を定めるものを言う．初期値に対応する部分集合 (canonical surface) から系の漸近的性質を定める固定点近傍までの大局的な軌道（臨界軌道）がすなおな場合にくりこみ群は有効である．くりこみ群力学系においてスケール変換の方向に対応する不安定な方向が一つあって残りの方向が安定方向であるような双曲型固定点が念頭にある．初期値を臨界軌道上から少しずらすと軌道の漸近的な振る舞いは臨界軌道と大きく異なるが，固定点近傍に長くとどまることから，固定点近傍の力学系の振る舞いから元の系の漸近的性質についての情報を得られる，というのが，理論物理学におけるくりこみ群の描像である．

理論物理学では，スピン系の平衡系統計力学における臨界現象の分析，特に臨界指数の決定，および，その連続極限としての場の量子論の分析に関して大きな成功を収めてきた．くりこみ群は本質的な描像であり，数学的にも深い意味があると考える研究者は多いと思うが，その深さを尽くした数学的一般論としてのくりこみ群はまだない，というのが本書の立場である．たとえば，固定点近傍で線形化した力学系の考察を行う解析はあるが，canonical surface は一般には固定点から離れていて固定点近傍までの大局的な軌道がすなおであることを言わなければ固定点近傍の解析結果を元の系の性質に翻訳できない．力学系にはカオスという現象がよく知られていて，大局的な軌道の統一的な解析は一般に極めて難しい．くりこみ群の数学と言うためには，大局的な軌道がすなおである，という期待の数学的由来を明らかにすることが必要である．

本書は数学的一貫性にはこだわったが，数学の理論としてのくりこみ群の可能性の全体像を追求することは諦めて，できる限りやさしい，しかし，落としてはならないと考える本質は含まれているような，対象にくりこみ群を適用すること，を目指した．特定の興味ある系について複雑な解析によるくりこみ群の軌道解析の最先端の成果を紹介するのではなく，path 上の確率測度というもっとも簡単な系を題材とすることで，専門的な背景知識をできる

だけ用いずに，かつ，数学的正確さを損なわずにくりこみ群を紹介することで，数学的に未完成のくりこみ群研究の動機付けとなることを目指した．

具体的には，第 II 部の最初の節で $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖において，まず精度のスケール変換を説明し，次に，1 次元のくりこみ群を任意に与えてそれと整合する確率連鎖を構成する．くりこみ群を与えることは，微分方程式や確率微分方程式のように元の系を決める方程式の役割を果たすことが期待されるが，その期待の一つの数学的実現になっている．そして，その確率連鎖の漸近的性質として重複対数の法則の一般化がくりこみ群から得られることを示す．第 II 部の残りの節では d 次元 gasket 上の self-avoiding paths を題材に選んで，くりこみ群の大局的な軌道解析について紹介する．

本書の立場は現在の高校の教科書で微積分学を扱う姿勢に似ているかもしれない．極限などの高度な概念を含む数学的対象について，題材を徹底的に絞ることで話の糸口だけは伝わるようにすることが高校の数学の教科書の目標であるとするならば，本書は未来の大学初年級の教科書でくりこみ群を紹介するときの題材を選ぶ一つの試みである．現在のくりこみ群が数学として未完成であるという時代の制約の中で，どこまで成功したかは 40 年後を待たないといけない．

本書の完成には多くの方々に助けられた．講義録の出版を薦めて下さった熊谷隆，木上淳，服部久美子の各氏，本書第 II 部で取り上げた題材の共同研究者である服部久美子，楠岡成雄，渡辺浩，中島日出雄，Ben Hambly, Martin Barlow，津田稔朗の各氏，また，本書で取り上げられなかったが，本書に続いて取り上げるべき題材である hierarchical model のくりこみ群の共同研究者でもある渡辺浩氏と原隆氏，第 I 部で紹介した self-avoiding path のレース展開に関して教示下さった原隆氏，補遺 §A で紹介したタウバー型定理に関して教示下さった笠原勇二，小杉のぶ子，熊谷隆，田崎晴明の各氏，本書の出発点となった数理物理学の講義と集中講義，および，本書執筆を支えた数学会特別講演と各大学の談話会の機会を与えて下さった金井雅彦，岩田耕一郎，服部久美子，長田博文，長井英生，神保道夫，樋口保成，石毛和弘，竹田雅好，伊東恵一の各氏，web に貼った講義録に関心を持って下さったみなさま，また，それぞれ講義録と本書の原稿を詳しく読んでとりわけ多

数の意見や指摘を下さった落合啓之と服部久美子の各氏，原稿への指摘を下さった武末真二，保阪賢資の各氏，ならびに大学院のゼミの伊藤俊成，藤井篤之，萩原浩平，樋口祐美，大谷重人の諸君，本シリーズ編集委員会の木上淳氏，共立出版（株）の小山透氏と大越隆道氏，の皆様には，本書の執筆に関して直接お世話になった．

最後に，本書の執筆中の厳しい時期に心配し，あるいは，励まして下さった方々に特に感謝したい．

本書の読み方

本書は第 I 部，第 II 部，補遺に分かれている．

(i) 第 I 部では，単純ランダムウォークと self-avoiding path を題材として，path 上の確率測度にまつわる初等的な事実を紹介する．単純ランダムウォークと self-avoiding path それぞれについては詳しい教科書があるが，題材を限定することで両者を 1 冊の教科書で扱った．
たとえば学部学生のゼミなどで読み進められることを念頭に置いた．

(ii) 第 II 部では，複雑な形の path を，大まかな構造（ぎざぎざ）に細かい構造（ぎざぎざ）を付け加えていくことで作る，というくりこみ群の見方を path 上の確率測度という題材の中で紹介する．本書の主題は第 II 部にある．
確率論を専攻する大学院生ならば問題なく読み進められるが，定理の結果を認めることにすればそれ以外の分野の院生でも概要がつかめることを期待している．確率連鎖や確率過程に関する基本的な知識があれば第 I 部をとばしていきなり第 II 部を読むことができる．

(iii) 補遺は，最後の節 (§F) を除いて標準的な確率論の教科書の基礎的な内容（たとえば，本シリーズの [T1] の第 1 章）を既知として，そこから第 II 部の本文の内容までを結びつける内容を収めてある．
本書の第 II 部の内容やその周辺について専門的に研究したい読者が，証明の技術やアイデアの由来などを確認する際に利用できることを念頭に置いた（逆に技術的な定理は全て信用して話の流れだけを追いたい読者は，補遺を省略して第 II 部だけを読んでも流れはつながるように第 II 部

の記述を配慮してある).

§F には第 I 部を読むのに必要な最小限の確率論の知識を収めた. 内容は, 本シリーズの [T1] の特に付録 A と重なる点も多いが, 整理と復習の便宜のために含めておく.

本書の第 I 部, 第 II 部本文, 補遺, は想定する読み手が異なる. 言い換えると, 3 冊分の内容をよくばって 1 冊にまとめたので少々分厚くなった. 必要なときに必要な部分を楽しんでいただければ幸いである.

記　　　　　号

以下の記号を (その他の標準的な数学記号とともに) ことわりなく用いる. なお, 確率に関する基本的な記号のうち本書で用いるものは §1.2 と §F で復習する.

集合に関するもの　整数の集合は $\mathbb{Z}$ と書く. 同様に実数と複素数についてはそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ と書く.

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ については + の添え字を付けて非負 (0 を含む) のものを集めた集合を表す. たとえば $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. 必ずしも一般的ではないだろうが, 本書では自然数というときは正の整数 (0 を含まない) を指し, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と書く.

集合の演算では, A の補集合を A^c と書き, $A \setminus B = A \cap B^c$ と書く. 集合 A の濃度 (要素の個数) を $\sharp A$ で表す. たとえば $\sharp\{2, 3, 5\} = 3$. 集合 A 上の実数値関数 $f\colon\ A \to \mathbb{R}$ と A の部分集合 $U \subset A$ に対して $f(U)$ を f による U の像, すなわち, 集合 $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$ の意味に使う. 複素数値関数などでも同様とする.

大括弧 $[,]$　実数の区間について $[a, b]$ は閉区間 (a, b を含む), (a, b) は開区間, $[a, b)$ は a を含み b を含まない右側開左側閉区間とする. なお, §4.2.3 では $[a, b]$ は自然数の場合に準用して, たとえば $[1, 5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ の意味で使う.

実数 a に対して $[a]$ は a を越えない最大の整数を表す（ガウスの記号）．

本書では，「大括弧」$[\cdot]$ は，閉区間とガウスの記号，それから，確率や測度，期待値，そして集合属の生成するシグマ加法族（$\mathrm{P}[\ \cdot\ ]$, $p[\cdot]$, $\mu[\cdot]$, $\mathrm{E}[\ \cdot\ ]$, $\sigma[\cdot]$ など）の変数（引数）を表す意味には使うが，計算のまとまり（優先順位）を表す「かっこ」の意味には用いないので，混乱はないだろう．

特別な関数 χ, δ　集合 A に対して関数 χ_A は A の定義関数とする．すなわち，$x \in A$ のとき $\chi_A(x) = 1$，$x \notin A$ のとき $\chi_A(x) = 0$，で定義される関数である．χ という記号は §4.2 では別の関数（帯磁率）に用いるが，添え字が集合でないことと，その節では集合の定義関数は出てこないので混乱はないだろう．

$\delta_{i,j}$ は $i = j$ のとき 1，そうでないとき 0 を表す（クロネッカーの記号）．添え字がない δ は（ある程度小さいことが想定される状況で）実数変数を表すのに用いる．§D.3 では δ_n なる記号が出てくるが，これは実数のベクトルの列（の第 n 項）を表す．いずれもクロネッカーの記号と混乱することはあるまい．

なお，特別というほどではないと思うが，$\max\{a, b\}$ は a と b のうち大きいほう（小さくないほう），$\min\{a, b\}$ は a と b のうち小さいほう（大きくないほう），をそれぞれ表す．たとえば $\max\{3, -4\} = 3$, $\min\{2, 2\} = 2$.

極限に関するものと ∞　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して $a_n \sim b_n$ を $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ の意味，$a_n \approx b_n$ を $\log a_n \sim \log b_n$ の意味，にそれぞれ使う．両者の違いが問題になるような微妙な式変形の途中ではこれらの記号を使わず，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の漸近的性質が似ていることを強調したい場合（結果の式など）にのみ用いる．

$a_n \fallingdotseq b_n$ は以上を踏まえて，曖昧な意味で「そのような何らかの関係があると期待する」という意味に使う．もちろん定理の主張や証明には使えないが，議論の見当をつける場合に用いる．曖昧さが気になる場合はこの記号がある付近の議論は飛ばしてもあとには影響しない．

大学初年で習う通り $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の ∞ は $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ という極限（級数の和）を表す記号であって，a_∞ なる項を足す意味ではない．一方，本書では（統計モデルの確率論を扱うときは必然的なことだが）関数の値域や定義域に $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を用いる（非負整数と ∞ の両方を考える）場合があるので，上記の級数の和の記号の定義は注意を要する．たとえば Ω 上に確率 P が定義されているとき，Ω 上の自然数または ∞ に値をとる関数 $\tau\colon\ \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して，

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ \{w \in \Omega \mid \tau(w) = k\}\ ] + \mathrm{P}[\ \{w \in \Omega \mid \tau(w) = \infty\}\ ]$$

のように，級数の和とは別に $\tau = \infty$ となる確率を別途明示的に和をとらないと全ての場合を尽くしたことにならないことに注意．

数列や級数とは似て非なる ∞ の使い方に，集合列 $A_1, A_2, \ldots$ の和集合がある．$w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ とはある k に対して $w \in A_k$ となることを言う．数列の場合は $\lim_{n\to\infty} a_n$ は $\{a_n\}$ のどの項とも異なる値になる可能性があるが，集合 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ には，A_k たちの中にない新しい要素は付け加わらない（もちろん，定義通り考えれば当たり前のことだが，本書の議論には以上を曖昧に扱うと失敗する部分がある，という注意である）．

目　　次

序章

「ぎざぎざ」からくりこみ群へ

ぎざぎざ　図 1 と図 2 はそれぞれ 4000 歩の $\mathbb{Z}^2$ 上の単純ランダムウォークと self-avoiding path のサンプルの軌跡である．単純ランダムウォークは京都のように縦横規則正しく道が通っていて，ある交差点にいた人が一定の時間の後に等確率（確率 1/4 ずつ）で四つある隣の交差点のどれかに移るというすごろくのような動きを言う．単純ランダムウォークはどんな（行ったり来たりのような無駄な）動きも全て許すのに対して，self-avoiding path は一度通った交差点は二度と通らないという条件を付けた動きだけを考える（確率を入れるときは，たとえば，k 歩の self-avoiding path の集合を考えて，その全てが等確率で選ばれる，などの定義を考えればよい）．

図 1 と図 2 に共通する特徴として，path がぎざぎざしていて「なめらかさ」からはほど遠いことがまず見える（いまいる交差点から隣の交差点に移り，いきなり遠くの交差点にワープすることはしない，というすなおな動き



図 1

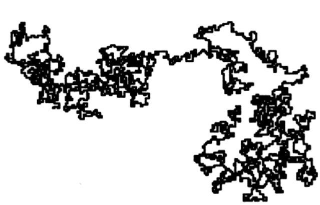


図 2

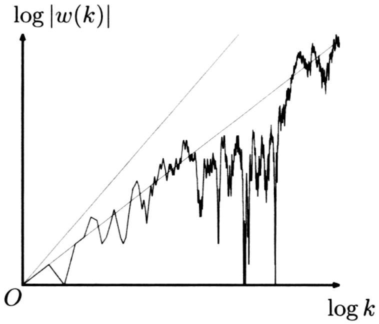


図 3

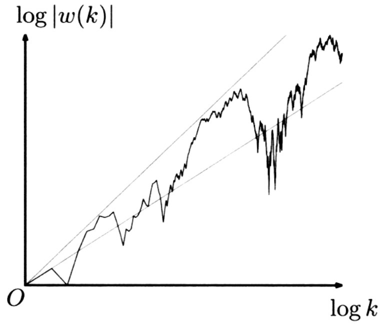


図 4

方を本書では path と呼ぶ）．以後，交差点の間の動きは考える必要がないので，隣の交差点までを 1 歩と数えることにする．Path がぎざぎざしているということは，長い path の漸近的振る舞い，すなわち，k 歩目の位置を $w(k)$ とおくとき，たとえば，$|w(k)|$ の期待値 $\mathrm{E}[\,|w(k)|\,]$ が k とともにどのように増えるか，ということに重大な影響がある．たとえばまっすぐ東に向かう path ならば $|w(k)| = k$ となる．$w(k) = k^{\nu}$ と書けば $\nu = 1$ ということになる．しかし，一般に単純ランダムウォークのように典型的な path がぎざぎざしていると，漸近的振る舞いを決める指数 ν，つまり，大きい k で $\mathrm{E}[\,w(k)\,]$ が k^{ν} に近い振る舞いをする，というときの ν は，ぎざぎざのために，1 より小さくなる．

図 3 と図 4 はそれぞれ図 1 と図 2 のサンプルについて，k 歩目での出発点（原点）からの距離 $|w(k)|$ を両対数グラフに図示したものである．図中 2 本の直線は $|w(k)| = k^{\nu}$ のグラフで，上の直線が $\nu = \dfrac{3}{4}$，下の直線が $\nu = \dfrac{1}{2}$ に対応する．一つのサンプルでは長い距離を経た後にたまたま原点近くに戻ることもあるので，グラフが横軸近くに落ち込んで見にくいが，グラフの上部に注目（定理 2.7 の重複対数の法則で $\overline{\lim}$ を見ることに対応）すれば，どちらのサンプルも $\nu < 1$ を強く示唆している．ある程度の距離に広がるまでに要する時間（歩数）が距離に比例しない $(\nu < 1)$ というめざましい特徴は path がぎざぎざしていることに由来する．

単純ランダムウォークや self-avoiding path では，単に定性的にぎざぎざしているというだけでなく，ν についてもっと定量的なことが言える．まず図 3 の単純ランダムウォークの場合は $\nu = \dfrac{1}{2}$ と矛盾がない．図 4 の self-avoiding path についてはそこまではっきりとは言いにくいが，単純ランダムウォークとははっきり ν の値が違って，$\nu = \dfrac{1}{2}$ よりは $\nu = \dfrac{3}{4}$ に近いようにみえる（図 1，図 2 は全体の広がりが本に納まるように調整したので，歩幅が二つの図で異なることに注意．Self-avoiding path のほうが広がりやすい）．値は異なっても，漸近的振る舞いを決める指数 ν の値が決まるという期待を抱かせるグラフになっている．

ぎざぎざであるがゆえに ν の値が 1 より小さくなるのだが，ぎざぎざというランダムな現象が ν というランダムでない（しかも自明とは言えない）定数を内包している，そのしくみを説明するのがくりこみ群である．

精度のスケール変換　単純ランダムウォークも self-avoiding path も典型的な path が持つぎざぎざにはスケール不変性（もう少し詳しく言うと漸近的な統計的自己相似性）という重要な特徴がある．Path はもちろん 1 歩ごとに折れ曲がりうるのが，もっと大きな距離を単位にしてもぎざぎざしている．たとえば $\mathbb{Z}^n$ を 1 辺 2 単位ごとに区切って，1 辺が 2 の n 次元立方体の集まりと見て，典型的な path が大きさ 2 のある立方体から隣の立方体に移る時の境界の点だけに注目して，それらの点を順次線分つないで折れ線を作る．この折れ線は，元の path から約 2 以下の細かい構造を消して粗い構造だけ見た path，ということができるだろう．そのとき，この折れ線は元の path に比べてなめらかになっているか，というと，やはりぎざぎざしているはずである．なぜなら，もし大きな構造だけながめたときまっすぐならば，歩数と到達距離はほぼ比例するので，漸近的な指数は 1 になるはずだからである（たとえば図 5 はぎざぎざな path だが，指数は 1 になる）．単純ランダムウォークについては §1, §2, §3 でいくつかの角度から指数 ν が 1/2 に等しいということ，すなわち典型的な path の到達距離は歩数の平方根に漸近的にほぼ比例することを見る．これが成り立つためには，どんなに大きな構造をながめても，すなわち，大きさ 2 ではなく，4, 8, ... の粗さで path をながめ

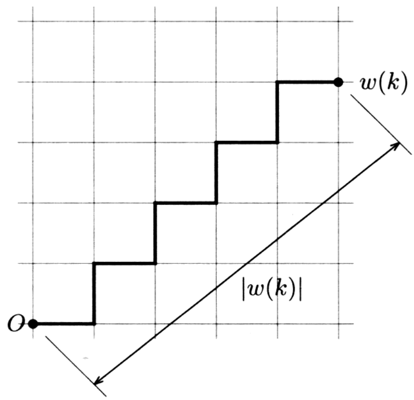


図 5

ても，漸近的にぎざぎざしていなければならない．あらゆる大きさ（スケール）のぎざぎざが共存することが，1 次元的な直線とは異なる指数を引き起こす．第 II 部 §5 でこの「ぎざぎざが指数を決める」という視点を $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖に対して厳密に定式化する．

普遍性とくりこみ群　あらゆる大きさ（スケール）のぎざぎざが共存していて，それが path の漸近的な振る舞い（指数）を決めるということは，漸近的な性質を調べるためには大きなスケールのぎざぎざの共存が本質であって，それに比べて空間的に小さい構造である path の単位長さ（元の空間の格子構造）は影響しない，ということでもある．つまり，path が乗っている空間格子が見えないほど大きな構造（長い path）が重要で，指数は格子の形などの系の細かい構造によらず，空間次元などの大きなスケールの量だけで決まることが期待される．

どの程度モデルを変えても指数が変わらないのかは必ずしも明確ではないが，系の細かい構造によらないだろうという期待のことを理論物理学では普遍性の仮説 (universality hypothesis) と言うことがある．普遍性は一般的に証明が済んでいる定理ではなく，研究の順序を決めるための作業仮説である．

作業仮説としての意義は，たとえば次のようなときにある．§2.1.1 で見るように，k 歩の（制限をつけない）path の集合上の一様分布は k に関して整合条件があるので，それと整合する確率連鎖（無限長 path 上の確率測度）が存在する．一方，§4.1.1 で指摘するように，k 歩の self-avoiding path の集合上の一様分布は整合条件がないので，そのままでは無限長に拡張できない．逆に言えば，無限長に拡張できる self-avoiding path を定義したとすると，その k 歩部分を指定した集合の上の分布は一様分布にはならない．したがって self-avoiding path の漸近的性質と言うとき，どちらの確率測度を用いるかを選ばねばならない．しかしもし，普遍性が成り立ってどちらでも同じ指数を与えるならば問題ごとに考えやすいほうで調べればよい．第 II 部 §6 で取り上げる Sierpiński gasket と呼ばれる図形上の self-avoiding path ではまさにこの意味での普遍性が成り立つ．そのモデルでは，一様分布と確率連鎖の間の普遍性がある力学系の双曲型固定点の近傍を通る軌道の振る舞いという数学的に明確な事実から厳密に導かれる．この力学系はくりこみ群と呼ばれ，「path のぎざぎざという視点に基づく解析」の実現である．第 II 部の各節でくりこみ群による解析を種々の確率連鎖に適用する．

ぎざぎざと微分不可能な曲線　上では path の大きなスケールの構造がスケール不変になる，という書き方をした．現実への応用ではむしろ大きな（ぎざぎざした）構造が先に人間の目に止まり，そこから細かく見ていくと，どんなに細かく見ても新たなぎざぎざが見えてくる（図 6）というふうに観測される．たとえば，ブラウン運動は，最初は花粉から飛び出た細かい粒子が極めて不規則な運動をしていたことで発見されたが，この運動は倍率を上げて，その一部分を拡大してながめても不規則である．

これに対して，たとえば微分可能な曲線は粗っぽく見たときは急激に変動する関数であっても，倍率を上げて十分短い範囲を見れば（微分可能性の定義によって）ほとんど直線に見える（図 6）．したがって，あらゆるスケールのぎざぎざが共存することに基づく解析であるくりこみ群は，微分可能性が使えない問題に対して，統計的自己相似性を手がかりにして細かく見ていく，という新しい解析手段を提供する可能性がある．場の量子論と呼ばれる理論

物理学の分野ではこのような期待からくりこみ群が深く研究されてきた．

本書では，このようにどんどん細かく見ていく，という見方（連続極限）については述べない（それをきちんと記述するためには連続な曲線上の確率測度の収束，といった，位相的性質を伴う確率測度の収束について議論しなければならないので測度論や確率論の準備がもう少し必要になる）．しかし，細かい構造を粗い構造に付け加える，というものの見方はもとの path の細かい構造を無視して粗い構造だけを見る，という見方の逆の操作として第 II 部のくりこみ群解析の基本となる．Path のぎざぎざに由来する漸近的な振る舞い（指数）は path に細かい構造を付け加えていくときの変化を追いかけること，たとえば，一段細かい構造を追加したとき（一段細かい精度で path を見たとき）歩数が平均何倍増えるか，という量を見ることで得ら

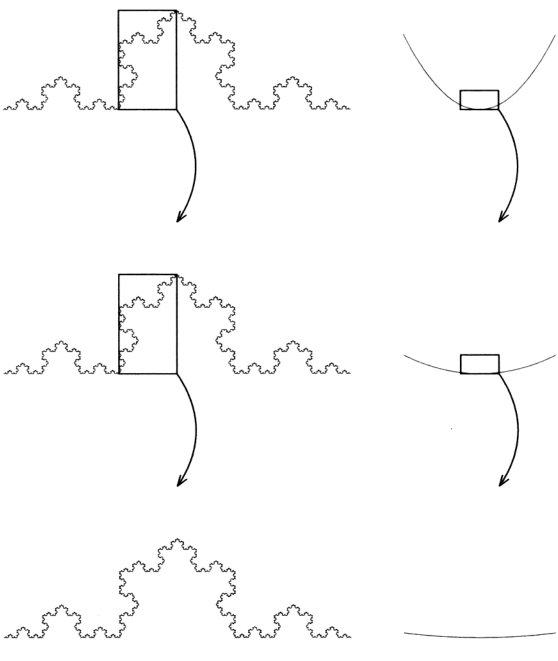


図 6

れる（これらについては具体的には第 II 部 §5.6.3 の $\dfrac{\partial \Phi_{1,u}}{\partial x}(x_{c,u})$ や §6.3.2 の (6.32) で定義する）.

もちろん，単純ランダムウォークはマルコフ連鎖などの強力な手法による解析が進んでいることでも分かるように，くりこみ群だけが微分不可能な曲線を解析する手段ではない．Self-avoiding path（特に空間次元の低いとき）のようにマルコフ性のない path 上の確率測度を扱うために，マルコフ性に基づかない新しい原理による解析を見つけたいというのがくりこみ群の一つの動機である．

Self-avoiding path　空間次元が小さい（4 以下の）とき，self-avoiding path は単純ランダムウォークと異なる漸近的振る舞いをすると予想されている (§4.3.1 参照．1 次元空間 $\mathbb{Z}$ 上では自明に正しい)．そういう意味では $n \leqq 4$ の場合の $\mathbb{Z}^n$ の上の self-avoiding path の漸近的振る舞いをくりこみ群によって導くことができればくりこみ群解析の成果となるであろう．残念ながら，本書執筆時点では成功していない．くりこみ群の数学はまだその正体を表していない．

幸い，pre-Sierpiński gasket とよばれるネットワーク（およびその d 次元拡張）はくりこみ群の視点からは self-avoiding path にとって $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}^2$ の間の次元に相当する．しかもこのネットワーク上の self-avoiding path についてはくりこみ群解析を数学的にきちんと定式化することができて，この節で書いた数々の期待が全て実現する (§6)．くりこみ群解析がうまくいく確率連鎖や path 上の測度の例が存在して，くりこみ群が数学として絵に描いた餅ではないことを示すことが第 II 部の主題である．

第I部

Path空間上の確率測度

1章

$\mathbb{Z}$ 上の有限長の path の確率論

1.1 Path の集合

第 I 部の主題であるランダムウォークは，数学では無限の長さを持つ経路 (path) の集合の上のある確率測度を指す専門用語である．その意味を理解するには測度の概念を必要とするので §2 まで紹介を延期して，この節 §1 は直感的に理解しても間違えることの少ない有限長さの path を考える．

本書では $\mathbb{Z}$ 上の有限長さの path とは，$\mathbb{Z}$ に値をとる有限長さの整数の列，たとえば

$$(0),\ (1,2),\ (-1,0,1,0,1,2)$$

などであって，列の隣り合う二つの要素の差が 1 であるものを言う．一般的に書けば，非負整数 k に対して $(w(0), w(1), \ldots, w(k))$ が $\mathbb{Z}$ 上の有限長さの path であるとは，$w(i) \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, であって

$$|w(i) - w(i+1)| = 1,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \tag{1.1}$$

となっていることを言うことにする．Path の $i+1$ 番目の成分 $w(i)$ は歩幅 1 の人が直線上を歩くときの i 歩目の位置と見ることができる．その意味で path の長さを歩数とも呼ぶことにする．また，1 歩をほぼ等時間で歩くことを念頭に置いて，i を時刻とも呼ぶ．

図示するときは，位置 $w(i)$ を歩数 i の関数と見る（図 1.1）．すなわち，path とはある非負整数 k に対して関数 $w:\ \{0, 1, 2, \ldots, k\} \to \mathbb{Z}$ であって (1.1) を満たすものと見る．数列と見るのも関数と見るのも同等なので，両者を区別せず，

$$w = (w(0), w(1), \ldots, w(k))$$

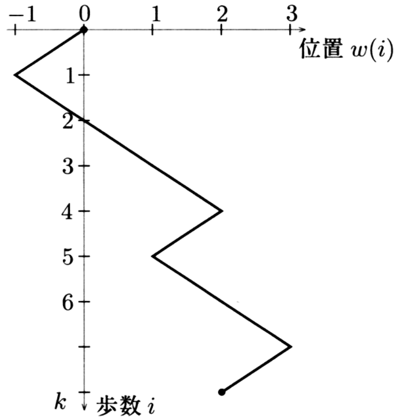


図 1.1

とも書く．

k は列の要素の個数から 1 を引いたものだが，これを path の長さと言い，$L(w)$ と書く：

$$w = (w(0), w(1), \ldots, w(k)) \quad \text{のとき} \quad L(w) = k.$$

一つの整数からなる列 $(w(0))$ は長さ 0 の path と扱う．

Path を 1 辺 1 の長さのます目がまっすぐつながったすごろくの上の駒の動きと見ることもできる．あとで確率を導入して単純ランダムウォークを定義するとき，硬貨を投げて表裏に応じて左右のます目に移動するすごろくも念頭に置く．つまり，ℤ 上の path というとき，背後に考えている現象は，1 回の動きで左右どちらかの隣の場所に移るという規則さえ守れば，1 歩の実際の幅は問題にせず，実際の動きが 1 歩分 50cm であってもます目一つ分 5cm であっても上記の path によって記述する．

隣の場所に移るという規則に限るのは，そのようなもっとも単純な場合に限っても本書で扱う内容の本質が失われないから，という理由の他に，連続な動き（時間の連続関数）のサンプリングという意識もある．世の中のあらゆるものは（星でも新幹線でも人でも分子でもニュートリノでも）時間と共

に連続に位置を変え，時間に関して不連続な変位をしない．一方，ものの位置が複雑な時間変化をしているときにそれを精密に記録するのに，現実には有限個の時刻での位置を記録するしかない（人生は有限だから）．観測時刻の時間間隔を一定にして各観測時の位置を計ることが多いかもしれないが，観測位置を決めておいて，各観測地点を通過した時刻を記録してもよい．たとえば自動車の走行記録をとるのに，途中の経路の主要な曲がり角を通った時刻を記録する方法がある．経路だけが重要な場合はどの曲がり角をどの順に通ったかを記録すればよい．直線上を行ったり来たりする運動に対して観測位置を等間隔にとって，通過地点のみを順に記録すれば，その記録は $\mathbb{Z}$ 上の path になる．

ところで，観測位置をより細かくとればより細かい運動の情報が記録できる．複数の記録が同じ運動を記録したもので，一方が他方より細かい記録になっているという関係があり得る．特に第 II 部では，このように必要に応じて，1 歩の歩幅を変えて，半整数 $2^{-1}\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, \dots\}$ 上の path や，もっと一般に $2^{-n}\mathbb{Z} = \{2^{-n}x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ 上の path をも考察して，異なる n の間の関係を議論する．どの場合も $\mathbb{Z}$ 上の path と同等であることはすでに書いた通りで，n を固定するごとには $2^{-n}\mathbb{Z}$ 上の path に対して $\mathbb{Z}$ 上の path の結果がそのまま使える．この考えを進めれば，path の列によって連続関数を再構成できるし，実際そのような方法で連続関数上の確率測度を作る手続きもよく知られている．ただ，連続関数上の確率測度をきちんと理解するためには測度と位相に関するある程度の理解が不可欠なので，本書では立ち入らない．

$\mathbb{Z}$ 上の path を考えるとき，どの整数点も対等で区別がない．出発点が 1 の path は path 全体を -1 方向にずらせば形を変えずに出発点を 0 とすることができる．そこで，断らない限り原点 0 を出発点とする path を考える．$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して出発点が原点 0 ($w(0) = 0$) で長さが k ($L(w) = k$) の $\mathbb{Z}$ 上の path を全て集めた集合を Ω_k とおく．Ω_k は 2^k 個の要素からなる有限集合である．

ここまで，有限の長さの path を考えてきたが，§2 以降では長さ無限（無限歩）の path も考える．長さが無限の $\mathbb{Z}$ 上の path とは，関数 $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$

（あるいは各項が整数の無限数列 $w=(w(0),w(1),w(2),\dots)$）であって，条件 (1.1) を無限時刻まで考えたもの

$$|w(i)-w(i+1)|=1,\ i=0,1,2,\dots, \tag{1.2}$$

を満たすものをいう．そのような path に対しては $L(w)=\infty$ と書くことにする．出発点が原点 0 ($w(0)=0$) で長さが無限 ($L(w)=\infty$) の path を全て集めた集合を Ω とする．$\mathbb{Z}$ 上の有限長または無限長の path $w\in\Omega\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$ をまとめて $\mathbb{Z}$ 上の path とよび，その長さを $L(w)$ と書く．長さという代わりに歩数と呼ぶときは $L(w)$ 歩目，または，時刻 $L(w)$ で止まった，とも言うことにする．

1.2　Path の集合の上の確率

$k\in\mathbb{Z}_+$ に対して原点を出発点とする k 歩の path の集合 Ω_k の平均的な振る舞いを調べるのに，もっとも単純な方法として path に関する単純平均を考える．単純平均は §2 で説明する単純ランダムウォークと有限歩に限れば等価である．

この節 §1.2 の残りで確率論の基本である確率測度，確率変数，期待値という単語を，本書の記号の例示を兼ねて，簡単に復習する．確率論の基礎については標準的な教科書（たとえば本書と同じシリーズの [T1]）を参照していただきたい．

全体集合 Ω_k が有限集合で，その要素一つからなる集合 $\{w\}$ の確率 $\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ が全て定義されているとき，P_k が確率測度であるとは，全ての $A\subset\Omega_k$ に対して非負実数 $\mathrm{P}_k[\,A\,]$ が定義されていて，$\mathrm{P}_k[\,\Omega_k\,]=1$ および有限加法性，すなわち，$A\cap B=\emptyset$ なる $A,B\subset\Omega_k$ に対して

$$\mathrm{P}_k[\,A\cup B\,]=\mathrm{P}_k[\,A\,]+\mathrm{P}_k[\,B\,] \tag{1.3}$$

を満たすことを言う．

k 歩の path についての単純平均に相当する確率測度（Ω_k 上の一様分布）は，各 path $w\in\Omega_k$ に対して

$$\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]=2^{-k} \tag{1.4}$$

を満たす P_k である．この式と

$$\mathrm{P}_k[\,A\,] = \sum_{w\in A} \mathrm{P}_k[\,\{w\}\,],\quad A\subset\Omega_k\,, \tag{1.5}$$

によって P_k を定義する．$A\subset\Omega_k$ に対して A の要素の個数を $\sharp A$ と書けば，(1.4) と (1.5) から

$$\mathrm{P}_k[\,A\,] = 2^{-k}\sharp A$$

となるので，出発点と歩数を固定した path の集合上の一様分布に関する計算は path の本数を数えることに他ならない．

$\sharp\Omega_k = 2^k$ なので $\mathrm{P}_k[\,\Omega_k\,] = 1$ である（というより，そこから (1.4) の 2^{-k} を決めた，というのが正しい）．また，要素の個数だから有限加法性 (1.3) を満たすのは当然である．よって P_k は Ω_k 上の確率測度である（無限長の path の集合 Ω 上に確率測度を定義するときは，(1.5) によって定義することができないので，§2, §F.1 では少し違う見方で定義する）．

確率は集合に対して（0 以上 1 以下の）値を対応させる集合関数である．上で定義した P_k に対しては Ω_k の各点に対して定義された関数と思っても困らないが，§2 以降で無限集合を扱うときに困るので，最初から確率は集合 $A\subset\Omega_k$ に対して値 $\mathrm{P}_k[\,A\,]$ を対応させる集合関数と定義する．全体集合と確率測度を合わせて (Ω_k, P_k) のように書いて，確率空間と言う．無限集合を扱うときは，全ての集合に対して確率が定義されているとは限らないので，もう一つ記号を追加することになる (§2.1, §F.1)．

確率測度は集合関数だが，Ω_k 上の（普通の意味で各点で値が定義された）関数を，確率論では確率変数と言う．関数は $f\colon\ \Omega_k \to \mathbb{R}$ のように f, g などの記号を使うが，確率論では X, Y などを使うことが多い．本書では Ω_k の点が path，すなわち，整数時刻から整数点への関数なので，Ω_k 上の関数とは関数の集合の上の関数ということになる．その意味で X などの特別な記号を使うほうがいいかもしれない．無限集合の場合には条件が一つ加わる (§F.1)．

特別な関数として，集合 $A\subset\Omega_k$ の定義関数 χ_A は基本である．これは

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & w\in A, \\ 0, & w\notin A, \end{cases} \tag{1.6}$$

で定義される．つまり，A 上で 1，A の補集合 A^c 上で 0 となる関数である．たとえば，一定の値 c をとる定数関数は $c\chi_{\Omega_k}$ と書くことができる（実際はそんなにかたいことは言わずに，c とだけ書くことが多い）．関数の和や定数倍（まとめて線形結合と言う）も関数になるので，集合の定義関数の線形結合も関数だが，これを単関数または階段関数と呼ぶ．すなわち，c_i たちを定数とするとき $\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}$ という形の関数のことを単関数と言う（集合の定義関数と単関数は無限集合の場合でも以上の定義が通用する）．Ω_k のような有限集合の上では，以上をとことん用いると，任意の Ω_k 上の関数（確率変数）X は

$$X = \sum_{w\in\Omega_k} X(w)\,\chi_{\{w\}} \tag{1.7}$$

と書ける．すなわち，§1 では全ての確率変数が単関数である．非可算無限集合上の確率論では (1.7) の右辺の表記は役に立たないので §2 以降では，確率変数は単関数でないことのほうが普通になる．

Path $w \in \Omega_k$ にとって基本的な量として i 歩目の位置（変位）と i 歩目に左右どちらに動くか (増分) がある．今までは $w = (w(0), w(1), w(2), \ldots, w(k))$ と「成分表示」しておいてそれぞれ $w(i)$, $w(i) - w(i-1)$ と書いていたが，いずれも path 集合 Ω_k 上の関数，言い換えると確率変数，である．そこで，i 歩目の位置を表す関数を $W_i\colon\ \Omega_k \to \mathbb{Z}$，$i$ 歩目の動きを表す関数を $X_i\colon\ \Omega_k \to \{\pm 1\}$，とおく．成分表示との関係ではそれぞれ $W_i(w) = w(i)$, $X_i(w) = w(i) - w(i-1)$ である．

Ω_k の path は 1 歩ごとに左右いずれかに 1 ずつ動くので X_i は ± 1 いずれかの値しかとらない．また，原点を出発点とするので $W_0 = 0$ である．よって，$i = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$X_i^2 = 1, \quad \text{および} \quad W_i = \sum_{j=1}^{i} X_j, \tag{1.8}$$

が Ω_k 上で恒等的に成り立つ．

確率は Ω_k の部分集合に対して定義されているので，確率変数 X が与えられたとき，X の値がある範囲にあるような $w \in \Omega_k$ からなる集合の確率，たとえば，$\mathrm{P}_k[\ \{w \in \Omega_k \mid X(w) \geqq a\}\ ]$ といった量を考えることができる．これ

は関数の値の分布を決める重要な量で，頻繁に用いられる．そこで，このような関数の値が定める集合の確率を $\mathrm{P}_k[\,X \geqq a\,]$ のように（集合の記号と要素 w の記号を省略して）書く．つまり，実数の部分集合 A に対して

$$\mathrm{P}_k[\,X \in A\,] = \mathrm{P}_k[\,\{w \in \Omega_k \mid X(w) \in A\}\,]$$

といった書き方をする．「確率変数 X の値が A になる確率」という日常用語に合った書き方なので本書では積極的に用いる．

§1 では，この節 §1.2 の冒頭で書いたように，path についての単純平均を考える．これを本書のあとの節と統一的に書くために，期待値（定積分）という言葉を用意しておく（§1 を読むためだけならば，この節の残りの説明は単に単純平均を $\mathrm{E}_k[\,X\,]$ のように表す，という理解でも問題は生じない）．

確率測度 P_k に対して（ルベーグの意味の）定積分が定義できる．定積分は実数値関数 X と積分範囲を与えると実数値が決まる．確率論では定積分を期待値と呼び，積分範囲が全体集合のとき X の定積分を $\mathrm{E}_k[\,X\,]$ などと書く．また，積分範囲が集合 A のとき $\mathrm{E}_k[\,X;A\,]$ と書く．以下，もう少し詳しく説明する．

定積分（期待値）とは，集合 A の定義関数 χ_A に対してその測度（確率）を与え，かつ関数の線形結合に対しては個々の関数の積分の線形結合を与える量である（言い換えると，積分は線形性を持つ）．記号で書くと，関数（確率変数）X, Y と定数 c に対して

$$\mathrm{E}_k[\,X+Y\,] = \mathrm{E}_k[\,X\,]+\mathrm{E}_k[\,Y\,],\quad \mathrm{E}_k[\,c\,X\,] = c\,\mathrm{E}_k[\,X\,],\quad \mathrm{E}_k[\,\chi_A\,] = \mathrm{P}_k[\,A\,], \tag{1.9}$$

である．k ごとに異なる確率測度なので，どの確率測度で期待値をとっているか区別するために期待値にも対応する添字 k を付けた（一つの確率測度しか考えないときは (Ω, P) や $\mathrm{E}[\,X\,]$ のように添字をつけない．本書では以下断りなくこのように表記する）．たとえば単関数の期待値は (1.9) を繰り返し使うことで

$$\mathrm{E}_k[\,\sum_{i=1}^{n} c_i\,\chi_{A_i}\,] = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathrm{P}_k[\,A_i\,] \tag{1.10}$$

となる．積分範囲が A の場合の定義は

$$\mathrm{E}_k[\,X;A\,]=\mathrm{E}_k[\,X\,\chi_A\,]$$

である．ここで右辺の期待値の中身は二つの関数 X と χ_A の各点での積を与える関数である．積分の記号を用いるときは

$$\mathrm{E}_k[\,X;A\,]=\int_A X(w)\,\mathrm{P}_k[\,dw\,]=\int_A X\,d\mathrm{P}_k$$

など，いくつかの書き方がある．本書ではあまりこだわらずにスペースや積分変数の明示など都合に応じて自由に使いわける．

P_k については Ω_k の任意の 1 点（つまり，1 本の k 歩の path）からなる集合の確率 $\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ が (1.4) のように与えられているので，(1.7) と積分の線形性（(1.9) または (1.10)）を使えば

$$\mathrm{E}_k[\,X\,]=\sum_{w\in\Omega_k}X(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] \tag{1.11}$$

と書ける．このように，積分や期待値は有限集合上の確率測度では単なる重み付きの和のことである．しかし，期待値の定義は無限集合でも共通に使うことができるので，有限集合の場合も記号を先取りして，以上の期待値や積分の記号を用いる．

以上の定義は Ω_k のような有限集合の上で考えるときはこれで十分だが，無限集合で考えるときは，極限操作を考えないといけないので，いくつかの点で追加条件を要する（補遺 §F.1 にその要点を要約する．なお，極限が関係しない性質や記号は本書を通じてここで用意したものを踏襲する）．

1.3　変位の指数

k を自然数とする．出発点が原点の k 歩の ℤ 上の path の集合 Ω_k の上に §1.2 のように一様分布 P_k を考えた確率空間 (Ω_k,P_k) において，歩数を大きくしていく $(k\to\infty)$ ときに path の典型的な（あるいは平均的な）挙動を考える．手始めとしてこの節では変位の指数について説明する．

単位時刻あたり単位長さ進むとき，出発点からもっとも遠ざかれるのは，もちろん，まっすぐ進んだ場合で，歩数 k と位置 $w(k)$ の関係は

$$|w(k)|=k$$

である．$\mathbb{Z}$ 上では他に考えようがないので，少し回り道をして $\mathbb{Z}^2$，すなわち，京都のように東西南北に碁盤目状に道の通っている町で北東方向に進む場合に考えを巡らせる（図 5）と，

$$|w(k)| = \frac{1}{\sqrt{2}}k$$

となる．比例定数は変わるが出発点からの path の変位 $|w(k)|$ が歩数 k に比例することは変わらない．したがって特に

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log|w(k)|}{\log k} = 1\,. \tag{1.12}$$

話を $\mathbb{Z}$ 上の path に戻そう．当たり前に見えることを書いたのは典型的な道では決して「当たり前」ではないからである．(1.12) の右辺の 1 という数字は，目的地を目指して進む道という特別な場合の値であって，全ての path を対等に考える確率空間 (Ω_k, P_k) では，(1.12) の左辺の「典型的な値」は 1/2 になる（§3.2 で見るように，$\mathbb{Z}$ 上の path だけでなく，$\mathbb{Z}^n$ 上の path についても 1/2 になる）．

1/2 という数字を導くために，§1.2 の記号に従って path の i 歩目の位置を表す関数（変位）を $W_i:\ \Omega_k \to \mathbb{Z}$，$i$ 歩目の動きを表す関数（増分）を $X_i:\ \Omega_k \to \{\pm 1\}$，とおく．次の事実は，増分 X_j の独立性と呼ばれる著しい性質である（§3.3.1 も参照）．

定理 1.1　自然数 k に対して，(Ω_k, P_k) 上で $\mathrm{P}_k[\, X_i = 1\,] = \mathrm{P}_k[\, X_i = -1\,] = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{E}_k[\, X_i\,] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, および

$$\mathrm{E}_k[\, X_i X_j\,] = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

が成り立つ．

より一般に，任意の $1 \leqq j \leqq k$ に対して $\{\pm 1\}$ 上の複素数値関数 f : $\{\pm 1\} \to \mathbb{C}$ および，$\{\pm 1\}^{k-1}$ 上の複素数値関数（つまり，$\{\pm 1\}$ に値をとる変数 $k-1$ 個を変数とする関数）$g:\ \{\pm 1\}^{k-1} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_k[\, f(X_j)\, g(X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)\,] \\
&\qquad = \mathrm{E}_k[\, f(X_j)\,]\, \mathrm{E}_k[\, g(X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_k)\,].
\end{aligned} \tag{1.13}$$

特に，k 以下の自然数からなる列 $i_1, i_2, \ldots, i_p$ の中に奇数個現れる数字があれば

$$\mathrm{E}_k[\, X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p} \,] = 0 \tag{1.14}$$

となる．◇

証明　i 歩目の 1 歩の動きの平均が 0 であることは当たり前だが，念のため式で書くと次のようになる．

$$\mathrm{E}_k[\, X_i \,] = \sum_{w \in \Omega_k} X_i(w)\, \mathrm{P}_k[\, \{w\} \,]$$

において，path をひっくり返す（原点に関して対称移動する）変数変換 $w' = -w$ を行うと，Ω_k は原点を出発する k 歩の path を全て集めた集合だから，w が Ω_k を動くとき $w' = -w$ も Ω_k を動くことと，単純平均 (1.4) を考えているので $\mathrm{P}_k[\, \{-w\} \,] = \mathrm{P}_k[\, \{w\} \,]$ となること，および $X_i(-w) = -X_i(w)$ であることから，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_k[\, X_i \,] &= \sum_{w' \in \Omega_k} X_i(-w')\, \mathrm{P}_k[\, \{-w'\} \,] \\ &= -\sum_{w' \in \Omega_k} X_i(w')\, \mathrm{P}_k[\, \{w'\} \,] = -\mathrm{E}_k[\, X_i \,]\end{aligned}$$

となる．よって $\mathrm{E}_k[\, X_i \,] = 0$ を得る．同じ理由で $\mathrm{P}_k[\, X_i = 1 \,] = \mathrm{P}_k[\, X_i = -1 \,] = \dfrac{1}{2}$ も分かる．

2 次のモーメントについては，$i = j$ のときは (1.8) から明らかだから，$i \neq j$ のとき $\mathrm{E}_k[\, X_i X_j \,] = 0$ となることを証明する．(1.11) から

$$\mathrm{E}_k[\, X_i X_j \,] = \sum_{w \in \Omega_k} X_i(w) X_j(w)\, \mathrm{P}_k[\, \{w\} \,].$$

ここで，path $w \in \Omega_k$ に対して，j 歩目の 1 歩のみ反転させた path を対応させる関数を $\rho_j :\ \Omega_k \to \Omega_k$ と書く（図 1.2）．Ω_k は原点を出発する k 歩の path を全て集めた集合だから，ρ_j は全単射である．もっと強く，$\rho_j^{-1} = \rho_j$，つまり，逆関数が自分自身に一致することもすぐに分かる．当然，

$$X_\ell(\rho_j(w)) = \begin{cases} -X_j(w), & \ell = j, \\ X_\ell(w), & \ell \neq j, \end{cases}$$

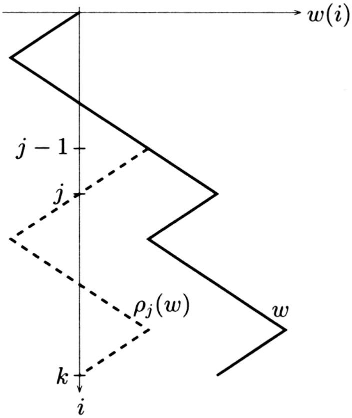


図 1.2

である．さらに，(1.4) から $\mathrm{P}_k[\,\{\rho_j(w)\}\,] = \mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ となることに注意すると，$i \neq j$ のとき

$$\sum_{w\in\Omega_k} X_i(w)\,X_j(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,] = \sum_{w\in\Omega_k} X_i(\rho_j(w))\,X_j(\rho_j(w))\,\mathrm{P}_k[\,\{\rho_j(w)\}\,]$$
$$= -\sum_{w\in\Omega_k} X_i(w)\,X_j(w)\,\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$$

となる．よって $\mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = 0$.

以上の証明では X_j にかかっているものが X_i でなくても X_j を含んでいなければ全く同様に成り立つし，X_j の代わりに X_j の関数であっても有効な議論なので (1.13) も得る．最後に，$i_1, i_2, \ldots, i_p$ の中に j が一つしかなければ (1.13) で $f(x) = x$ とおくことで (1.14) を得る．j が奇数個現れるときも (1.8) の $X_j^2 = 1$ から X_j が一つの場合と同じ値になる． □

系 1.2 $\mathrm{E}_k[\,W_k\,] = 0$ および $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,] = k$ が成り立つ． ◇

証明 いずれも，(1.8) と定理 1.1 から直ちに得られる．たとえば，

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] = \sum_{i\neq j} \mathrm{E}_k[\,X_iX_j\,] + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_k[\,X_i^2\,] = k$$

である．　□

変位の指標（k 歩でどの程度出発点から遠くまで離れるか）として最初に試したくなるのは k 歩目の平均の位置 $\mathrm{E}_k[\,W_k\,]$ かもしれないが，系 1.2 でみたようにこれは 0 になる（直感的にいえば，右に行く path と同じだけ左に行く path がある，ということである）．そこで，もっとも簡単な量は 2 次のモーメント $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ である．系 1.2 から，特に歩数と変位の関係について，2 乗平均の意味では，$W_k^2 \doteqdot k$，すなわち，$W_k \doteqdot k^{1/2}$ が言えたことになる．W_k の 2 乗の期待値（平均）という意味で，$\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ を 2 乗平均変位 (mean square displacement) と呼び，その意味での $W_k \doteqdot k^{1/2}$ の指数 1/2 を 2 乗平均変位の指数 (exponent) と呼ぶ．

ところで，2 次のモーメント $\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$ が k に等しいだけでは，出発点から遠ざかる path と出発点にとどまる path があって平均して k になる極端な可能性も排除できない．何らかの意味で典型的な path は全て $W_k \doteqdot k^{1/2}$ のように振る舞うならば，任意次のモーメントについて対応する結果を期待するだろう．つまり

$$\mathrm{E}_k[\,|W_k|^{2s}\,] \approx k^s \tag{1.15}$$

が全ての $s > 0$ で成り立つことを期待する．$s = 1$ のときは系 1.2 で証明したが，s が自然数のときも同じ証明方法で証明できる．

命題 1.3　$\ell = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\mathrm{E}_k[\,W_k^{2\ell}\,] = (2\ell - 1)!!\,k^{\ell}\,(1 + O(k^{-1})), \quad k \to \infty. \tag{1.16}$$

◇

注 1.4　$(2\ell - 1)!!$ は二つずつ減らした数の積

$$(2\ell - 1) \cdot (2\ell - 3) \cdot (2\ell - 5) \cdot \cdots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \ \left(= \frac{(2\ell - 1)!}{2^{\ell - 1}(\ell - 1)!} \right)$$

を表す（たとえば，$1!! = 1$, $3!! = 3$, $5!! = 15$）．

また，$a_k = O(b_k)$ とは，ある k によらない $C > 0$ が存在して $|a_k| \leqq Cb_k$ が全ての k で成り立つことを言う．(1.16) のように式の中の一つの項として $O(b_k)$ が入っているときは，$a_k = O(b_k)$ の形に式を変形した後に $O(b_k)$ の定義を適用する意味とする．ついでに，$a_k = o(b_k)$ とは，$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ が成り立つことを言う．たとえば $a_k = o(1)$ は $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ と同義である． ◇

証明 たとえば $\ell = 2$ のとき

$$\mathrm{E}_k[\, W_k^4 \,] = \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\sum_{i_3=1}^{k}\sum_{i_4=1}^{k} \mathrm{E}_k[\, X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4} \,]$$

において，定理 1.1 から，添字 $i_1, \ldots, i_4$ は四つとも等しいか二つずつ等しい場合のみ期待値が 0 でないので，(i) $i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4$，(ii) $i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4$，(iii) $i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3$，(iv) $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$，の 4 通りに和を分解すると，(i), (ii), (iii) は等しくなる．(1.8) から $X_i^2 = 1$ であることも使うと，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_k[\, W_k^4 \,] &= 3\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{1\leqq j\leqq k;\\ j\neq i}} \mathrm{E}_k[\, X_i^2X_j^2 \,] + \sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}_k[\, X_i^4 \,]\\ &= 3\sharp\{(i,j) \mid 1 \leqq i, j \leqq k, j \neq i\} + k = 3k^2 - 2k,\end{aligned}$$

となるので，$\ell = 2$ の場合の (1.16) が証明できた．

一般の ℓ については，$\ell = 2$ の場合に k^2 がどのように出てきたかを見るのが分かりやすいだろう．W_k^4 の期待値を X_i たちの積の期待値の和に直したとき，二つずつ添字が等しい (i)–(iii) の場合に添字についての和が 2 重になっていて，一つの和ごとに k が現れるので k^2 となっている．四つの添字が等しい場合は添字についての和が減るために k についての次数が低い寄与しかない．k^2 の項の係数 3 は四つの添字を二つずつペアに組み合わせる組み合わせ方の場合の数に等しい．以上の議論を一般の ℓ に拡張することは容易だろう．k について最大次数は

$$\mathrm{E}_k[\, W_k^{2\ell} \,] = \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\cdots\sum_{i_{2\ell}=1}^{k} \mathrm{E}_k[\, X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2\ell}} \,]$$

において，添字を二つずつ等しくおいたときの添字の総数 ℓ であり，その k^ℓ の係数は（k が ℓ に比べて十分大きいとき）添字 $i_1, i_2, \ldots, i_{2\ell}$ を二つずつ組み合わせる組み合わせかた

$$(2\ell-1)\cdot(2\ell-3)\cdot(2\ell-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1=(2\ell-1)!!$$

である．これ以外の項は k の次数が少なくとも 1 小さい．　□

命題 1.3 によって (1.15) において s が自然数の場合は証明できたが，一般の $s>0$ については W_k^{2s} が X_i たちの多項式にならないので，展開して場合の数を数えるという命題 1.3 の証明方法は使えない．§1.4 で中心極限定理を用いて一般の $s>0$ についても (1.15) を証明する．

1.4　中心極限定理

中心極限定理（補遺 §F.3 定理 F.16）は確率変数の法則収束（分布の弱収束）についての恐らくもっとも有名な基本定理だろう．この節 §1 で考えている path の位置を表す確率変数 W_k に対しては次が成り立つ．

命題 1.5　$\dfrac{1}{\sqrt{k}}W_k$ の P_k の下での分布 $\mathrm{P}_k\circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}W_k\right)^{-1}$ は $k\to\infty$ のとき平均 0，分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に弱収束する．　◇

命題 1.5 の確率変数の規格化定数（分母の $\sqrt{k}=k^{1/2}$）に現れる指数 1/2 と §1.3 の 2 乗平均変位の指数 1/2 が対応する．実際，(1.15) を自然数以外の s に対して導いていなかったが，これを命題 1.5 と命題 1.3 から導くことができる．

命題 1.6　任意の $s>0$ に対して s だけで決まる定数 $C_s>0$ が存在して，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathrm{E}_k[\,|W_k|^{2s}\,]}{k^s}=C_s\,,$$

すなわち，(1.15) が成り立つ．　◇

証明に立ち入る前に，典型的な path の性質という点からこれらの結果の意味を少しながめてみる．いずれの結果も，典型的な path の k 歩目の位置 W_k

が $k^{1/2}$ にほぼ比例する速さで原点（出発点）から遠ざかるという見方と矛盾しない．ただし，「目的地に向かってまっすぐ進む path では $W_k \propto k$ である」というときに比べて主張の内容はずいぶん複雑である．

まず，k を固定するごとに全ての path にわたる平均または分布を調べているので，1 本の path が時間と共に原点からゆっくり遠ざかるとは言っていない．1 本ごとにどうなるかを歩数 $k \to \infty$ の極限という形で記述するためには無限に長い path の集合の上の確率測度を用意しないといけないが，この節 §1 で扱う P_k は，まず歩数 k を決めて，その歩数までについてのみ path をながめているので，$k \to \infty$ の極限の様子を指定した主張は書くことができない．この点については §2 で無限に長い path の集合の上の確率測度を用意して §2.3 で再考する（そのとき，path ごとにながめると，W_k が $k^{1/2}$ のように振る舞うという表現は補正を要することも分かる）．

k 歩ごとの path に関する平均または分布という点から見たとき，いずれの結果も典型的な path の k 歩目の位置 W_k が $k^{1/2}$ に比例した広がりを示している．他方，命題 1.5 によると $W_k/k^{1/2}$ は一定ではなく path ごとに異なっている（その分布が k が十分大きければ正規分布に近い）ことを示している．言い換えると，path によらない数字として期待できるのは指数の 1/2 までである．その意味で指数 1/2 が「典型的な path」の振る舞いを示す基本的な量である．そこで，一般に path の集合上の確率測度が与えられて，その期待値と歩数の関係について (1.15) を一般化した

$$\mathrm{E}_k[\, |W_k|^s \,] \approx k^{s\nu}, \quad s > 0, \tag{1.17}$$

が成り立つとき，W_k の変位の指数 (displacement exponent, the end-to-end distance exponent) は ν である，ということにする．$\mathbb{Z}$ 上のあらゆる path に関する単純平均を考えたときの変位の指数は命題 1.6 によって $\dfrac{1}{2}$ である．変位の指数が ν ということは $|W_k|$ が k^ν 程度の範囲に分布していることを示唆する．まっすぐ進めば $W_k \propto k$ で指数は 1 だが，全く動かないならば $\nu = 0$ である．さらに想像をたくましくすれば，正方形の格子点を埋め尽くすように進めば $\nu = 1/2$ になるので，$\nu = 1/2$ という結果は「典型的な path」が 2 次元的に動いている可能性を示唆する．このように，ここでいう「指数」は

path の性質を決めるもっとも重要な定数であり，本書で扱う量の中心となるので，path の漸近的性質としての指数を単に指数と呼ぶことにする．

中心極限定理では指数が 1/2 となるが，第 II 部では，どのような path 集合を考えるかによって指数が変わりうることを示す．中心極限定理では増分の独立性が仮定されているが，現実の現象で path 上の確率測度で記述される現象では中心極限定理が成り立つ場合も成り立たない場合もある．しかも，中心極限定理が成り立たない場合の研究は単なる趣味的問題ではなく，統計力学における臨界現象や場の量子論の数学的定義の研究を通して，自然現象の根幹に関わることが分かっている．本書の第 II 部の主目的は，指数が 1/2 からずれる場合，すなわち，中心極限定理が成立しない場合を考察することである．

この節 §1.4 の残りで命題 1.5 を認めて命題 1.6 の証明を行う．命題 1.5 については，補遺 §F.3 の定理 F.16 にならって特性関数の各点収束と弱収束の同値性を用いて証明するのがすなおだが，§1.2 の範囲を超えるので補遺にゆずる．いずれの証明も本書の趣旨からは細かいことだが，あとで頻繁に用いる基礎事項の復習を兼ねることにする．

命題 1.6 の証明.　命題 1.5 と弱収束の定義（補遺 §F.3）から，任意の有界な連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\, f(k^{-1/2}W_k)\,] = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2} f(z)\, \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

以後，右辺を $\mathrm{E}[\, f(Z)\,]$ と書こう（つまり，標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z を用意した，ということだが，単に省略記号と思ってよい）．この式で $f(x)=x^{2s}$ ととれれば主張を得るが，これは連続だが有界ではないので使えない．そこで，$M>0$ を（十分大きな）定数として $f(x) = (\min\{|x|, M\})^{2s}$ を用いると（$|f(x)| \leqq M^{2s}$ なので有界である．連続性は明らかだろう），

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ \min\{(k^{-s}|W_k|^{2s}), M^{2s}\}\ ] = \mathrm{E}[\ \min\{Z^{2s}, M^{2s}\}\ ],\quad M>0\,. \tag{1.18}$$

右辺については

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{E}[\ \min\{Z^{2s}, M^{2s}\}\ ]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} z^{2s} e^{-z^2/2} f(z)\,\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} - \lim_{M\to\infty}\int_{|z|>M} (z^{2s} - M^{2s}) e^{-z^2/2} f(z)\,\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

において

$$0 \leqq \lim_{M\to\infty}\int_{|z|>M} (z^{2s} - M^{2s}) e^{-z^2/2} f(z)\,\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$
$$\leqq \lim_{M\to\infty}\int_{|z|>M} z^{2s} e^{-z^2/2} f(z)\,\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

から

$$\lim_{M\to\infty} \mathrm{E}[\ \min\{Z^{2s}, M^{2s}\}\ ] = \mathrm{E}[\ Z^{2s}\ ] \tag{1.19}$$

となるので，左辺で $k\to\infty$ と $M\to\infty$ が交換できればよい，つまり，大きい W_k からの寄与が k について一様に小さいことを言えればよい．弱収束だけではこれには不十分だが，すでに自然数の場合に命題 1.3 を証明してあるので，それを利用する．

以下の基本不等式を用いる（一般の確率空間で成り立つ形で書いてあるが，この節 §1 では $\Omega = \Omega_k$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_k$ と読み替えればよい．記号 $\mathcal{F}$ はこの節では無視してよい）．

補題 1.7　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$, $Y:\ \Omega\to\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ．

チェビシェフ (Chebyshev) の不等式　X が非負値関数 $(X \geqq 0)$ ならば，任意の $a \geqq 0$ に対して $\mathrm{E}[\ X\ ] \geqq a\mathrm{P}[\ X \geqq a\ ]$（特に，$X$ に X^2 を用いると $X \geqq 0$ の条件なしに無条件で $\mathrm{P}[\ |X| \geqq a\ ] = \mathrm{P}[\ X^2 \geqq a^2\ ] \leqq \dfrac{1}{a^2}\mathrm{E}[\ X^2\ ]$ を得る）．

シュワルツ (Schwarz) の不等式　$\mathrm{E}[\ |XY|\ ] \leqq \|X\|_2\,\|Y\|_2$．ここで $\|X\|_p = \mathrm{E}[\ |X|^p\ ]^{1/p}$（$L^p$ ノルム）．

ヘルダー (Hölder) の不等式　$p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$,（したがって，$1 < q < \infty$ でもある）のとき，$\mathrm{E}[\ |XY|\ ] \leqq \|X\|_p\,\|Y\|_q$．　◇

証明　いずれも，確率論に限らず積分論や関数解析等の広い意味の解析の教科書で用いられるが，本書全体を通じて断りなく用いる基本不等式なので，証明の筋道だけ簡単に示しておく．

チェビシェフの不等式　$\mathrm{E}[\,X\,] = \mathrm{E}[\,X; X \geqq a\,] + \mathrm{E}[\,X; X < a\,] \geqq \mathrm{E}[\,X; X \geqq a\,] \geqq a\mathrm{P}[\,X \geqq a\,]$.

シュワルツの不等式　次のヘルダーの不等式で $p = q = 2$ の場合である．

ヘルダーの不等式　$0 < \|X\|_p \, \|Y\|_q < \infty$ として証明すれば十分．まず，増減表を書くことで $f(x) = x^p/p + 1/q - x \geqq 0$ $(x \geqq 0)$ が分かるので，$x = a\,b^{-q/p}$ を代入して両辺に b^q をかけることで

$$a\,b \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqq 0, \ b \geqq 0,$$

を得ることにに注意しておく．あとは，$a = |X(w)|/\,\|X\|_p$, $b = |Y(w)|/\,\|Y\|_q$ とおいて期待値をとればよい．　□

$\ell > 2s$ なる自然数 ℓ をとってヘルダーの不等式で $X = |k^{-1/2}W_k|^{4s}$, $Y = 1$, $p = \ell/(2s)$ とすると，(1.16) から

$$\mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{4s}\,] \leqq \Big(\mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{2\ell}\,]\Big)^{2s/\ell} = ((2\ell-1)!!)^{2s/\ell}\ (1+O(k^{-1}))$$

だから，特に $\mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{4s}\,]$ は有界である：

$$C = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{4s}\,] < \infty.$$

また，チェビシェフの不等式から

$$M^{4s}\,\mathrm{P}_k[\,k^{-1/2}|W_k| \geqq M\,] \leqq \mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{4s}\,], \ M > 0\,.$$

よってシュワルツの不等式から，任意の $M > 0$ と $k > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\,] - \mathrm{E}_k[\,\min\{(k^{-1/2}|W_k|)^{2s}, M^{2s}\}\,] \\
&\leqq \mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{2s};\ k^{-1/2}|W_k| \geqq M\,] = \mathrm{E}_k[\,|k^{-1/2}W_k|^{2s}\,\chi_{k^{-1/2}|W_k| \geqq M}\,] \\
&\leqq \sqrt{\mathrm{E}_k[\,(k^{-1/2}|W_k|)^{4s}\,]\,\mathrm{P}_k[\,k^{-1/2}|W_k| \geqq M\,]} \leqq CM^{-2s}.
\end{aligned}$$

$k \to \infty$ として (1.18) を使うと

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\ \min\{Z^{2s}, M^{2s}\}\ ] &\leqq \varliminf_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ (k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\ ] \\ &\leqq \varlimsup_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ (k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\ ] \\ &\leqq \mathrm{E}[\ \min\{Z^{2s}, M^{2s}\}\ ] + CM^{-2s}. \end{aligned}$$

これが任意の $M > 0$ に対して成り立つから，特に $M \to \infty$ として (1.19) を使うと

$$\mathrm{E}[\ Z^{2s}\ ] \leqq \varliminf_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ (k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\ ] \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ (k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\ ] \leqq \mathrm{E}[\ Z^{2s}\ ].$$

すなわち，

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}_k[\ (k^{-1/2}|W_k|)^{2s}\ ] = \mathrm{E}[\ Z^{2s}\ ] \tag{1.20}$$

を得る．右辺を C_s とおいたものが命題の主張である． □

1.5　到達点を固定したときの path の本数

k 歩の path が典型的に，あるいは，平均的にどこにいるかを調べるためのもっとも基本的な量は点 $x \in \mathbb{Z}$ を固定するごとに k 歩で x に達する path の総本数 $N_{k,x}$ である．

$$N_{k,x} = \sharp\{(w(0), w(1), \ldots, w(k)) \in \Omega_k \mid w(k) = x\}, \quad k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Z}.$$

$a = \dfrac{k+x}{2}$ および $b = \dfrac{k-x}{2}$ とおけば，$k = a + b$, $x = a - b$ だから，a と b が数直線（あるいはすごろくの盤）をそれぞれ右と左に進んだ回数（コマの動いた目の数）になるので，k 歩のうちどの a 歩で右に進むかを決めることと path を決めることが 1 対 1 に対応する．よって

$$N_{k,x} = \begin{cases} \dbinom{k}{(k+x)/2}, & k - x \text{ が偶数のとき}, \\ 0, & k - x \text{ が奇数のとき}. \end{cases} \tag{1.21}$$

ここで $\begin{pmatrix} k \\ a \end{pmatrix}$ は k 個のものから a 個を選ぶ場合の数（2項係数）.

前節までの結果，たとえば命題 1.5 は，(1.21) を使えば直接得られる．しかも，そのほうが，局所中心極限定理（たとえば [T11, §7,§26][T12, §1.2] を参照）のような，より精密な結果も得られる．しかし，(1.21) のように path の本数が簡単な（漸近形の得やすい）形で計算できることは極めて特別な場合に限られるので，§1.4 まででではより一般性のある方法の紹介を優先した．この節 §1.5 では，少し脇道にそれて，(1.21) という精密な情報を用いて ℤ 上の path のよく知られた詳細な振る舞いをいくつか紹介するとともに，後々用いるいくつかの概念の簡単な場合を紹介する（議論が細かくなるので，先を急ぐ読者は §2 に進むことができる）．

1.5.1　反射原理と選挙の定理

反射原理 (reflection principle) はランダムウォークに限らずあらゆる path 上の確率測度に適用可能な考え方で，系 2.11（単純ランダムウォークの重複対数の法則）で用いる他に，そのアイデアは第 II 部の §5.5, §E.3 でも用いられる．

ここまで原点 0 を出発点 $w(0)$ とする path を考えてきたが，この節 §1.5 では，出発点 $w(0)$ が原点以外の path ((1.1) を満たす関数 $w:\ \{0,1,2,\dots,k\} \to \mathbb{Z}$) も考える．日常の言葉遣いに合わせて，$w(0)$ を出発点，k 歩の path に対して $w(k)$ を到達点と言い，また，出発点が x，到達点が y の path を x から y への path と言う．

命題 1.8 (反射原理)　$k,x,y \in \mathbb{N}$ とする．$-x$ から y への k 歩の path の本数は x から y への k 歩の path のうち，0 を通るものの本数に等しい（図 1.3）．

◇

証明　$-x$ から y への k 歩の path を $(w(0)=-x, w(1), w(2), \dots, w(k)=y)$ とする．$-x<0$, $y>0$ なので必ず 0 を通る．はじめて 0 を通る時刻（歩数）を τ とする：$\tau = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid w(i)=0\}$ $(<k)$．時刻 τ までの path を 0（出発点）に関して折り返せば x から y への path で 0 を通るものを得る（図 1.3）．明らかにこの変換は 1 対 1 で全射だから，主張を得る．□

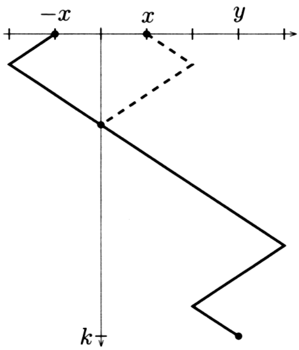


図 1.3

系 1.9　x を 0 以外の整数とするとき，0 から x への k 歩の path のうち 0 に戻らない（出発点以外では 0 を通らない）もの（つまり，$x > 0$ のときは常に正の側にあるもの，$x < 0$ のときは常に負の側にあるもの）の本数は $N_{k-1,x-1} - N_{k-1,x+1} = \dfrac{|x|}{k} N_{k,|x|}$ である．　◇

証明　$x < 0$ も同様なので $x > 0$ とする．元の path $w = (w(0) = 0, w(1), \ldots, w(k))$ の 0 歩目（出発点）を除いて，1 歩目から k 歩目までの $k-1$ 歩に注目すると $w(1)$ を出発点とする $k-1$ 歩の path

$$w' = (w'(0), w'(1), \ldots, w'(k-1)); \quad w'(i) = w(i+1),\ i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

を得る．$x > 0$ で w が 0 にならないから $w'(0) = w(1) = 1$ である．すなわち，条件を満たす path w と 1 から x への $k-1$ 歩の path w' のうち 0 を通らないもの全てが 1 対 1 に対応する．よって後者の本数を数えればよい．1 から x への $k-1$ 歩の path w' のうち 0 を通るものは命題 1.8 より -1 から x への $k-1$ 歩の path の本数に等しいので，これを 1 から x への $k-1$ 歩の path の本数から引けばよい．

§1.1 で原点を出発点とする $\mathbb{Z}$ 上の k 歩の path の集合 Ω_k を導入したときに注意した通り，$\mathbb{Z}$ 上のどの整数点も対等で区別がないので，たとえば出発点が 1 の path は path 全体を -1 方向にずらせば形を変えずに原点を出発点

とする path にできる．すなわち，出発点を固定した k 歩の path の集合は Ω_k と自然な 1 対 1 対応がある．したがって，特に，1 から x への $k-1$ 歩の path の本数は 0 から $x-1$ への $k-1$ 歩の path の本数 $N_{k-1,x-1}$ に等しく，また，-1 から x への $k-1$ 歩の path の本数は 0 から $x+1$ への $k-1$ 歩の path の本数 $N_{k-1,x+1}$ に等しい．よって，求める本数は $N_{k-1,x-1}-N_{k-1,x+1}$ に等しい．

$a=\dfrac{1}{2}(x+k),\ b=\dfrac{1}{2}(k-x)$ $(x=a-b,\ k=a+b)$ とおくと，$N_{k,x}$ の具体形 (1.21) と 2 項係数の性質から，これは

$$N_{k-1,x-1}-N_{k-1,x+1}=\begin{pmatrix} k-1 \\ a-1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k-1 \\ a \end{pmatrix}=\frac{a-b}{a+b}N_{k,x}=\frac{x}{k}N_{k,x}$$

と変形できる．　□

反射原理の有名な例題として，選挙の開票作業でリードを保ったまま勝つ確率についての定理（the ballot theorem，ballot は投票のこと）がある．

定理 1.10　二人の候補者 A, B について 1 票ずつ開票して最後にそれぞれ a, b 票ずつ得票して A が勝つ $(a>b)$ とする．A が常にリードしながら勝つ票の出方の総数と，（経過は問わずに）最後が a 票対 b 票となる出方の総数の比は $\dfrac{a-b}{a+b}$ である．　◇

証明　$x=a-b,\ k=a+b$ とおくと，票の出方の総数は $N_{k,x}$ である．常にリードしながら勝つ票の出方は 0 から x への k 歩の path のうち出発点以外では 0 を通らないものの本数と等しい．よって，定理は系 1.9 から直ちに得られる．　□

1.5.2　出発点に戻る確率

$2k$ 歩で出発点 0 に戻る確率

$$u_{2k}=\mathrm{P}_{2k}[\,W_{2k}=0\,], \tag{1.22}$$

および，$2k$ 歩で出発点 0 へ初めて戻る確率

$$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_2 \neq 0, \ldots, W_{2k-2} \neq 0, W_{2k} = 0\,], \tag{1.23}$$

について調べる（奇数歩で出発点に戻ることがないことに注意）．

どの $2k$ 歩の path w も出現する確率は $\mathrm{P}_{2k}[\,\{w\}\,] = 2^{-2k}$ なので，path に関する事象（集合）の確率はその集合に属する path の本数を 2^{-2k} 倍すればよい．したがって (1.21) から

$$\mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 2i\,] = 2^{-2k} N_{2k,2i} = \binom{2k}{k+i} 2^{-2k},$$
$$i = -k, -k+1, -k+2, \ldots, k-1, k. \tag{1.24}$$

特に，(1.22) は

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}. \tag{1.25}$$

補題 1.11　(i) $1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_2 \neq 0, W_4 \neq 0, \ldots, W_{2k} \neq 0\,] = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0\,] = u_{2k}$.

(ii) $f_{2k} = u_{2k-2} - u_{2k} = \dfrac{1}{2k-1} u_{2k} = \dfrac{1}{2k} u_{2k-2}$.　◇

証明　(i) 最初の等号は f_{2i} の定義と，奇数歩目で 0 に戻らないことから明らか．途中で原点に戻らないから，常に正にいるか常に負にいるかどちらかで，対称性から両者の確率は等しい．したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 \neq 0, \ldots, W_{2k} \neq 0\,] &= 2\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 > 0, \ldots, W_{2k} > 0\,] \\ &= 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}_{2k}[\, W_1 > 0, \ldots, W_{2k-1} > 0, W_{2k} = 2i\,]\end{aligned}$$

（和は $i > k$ では確率が 0 になるので実際は有限和だが，以下，和の上端の処理を書くのをさぼる）．$i < k$ のとき 0 から $2i$ への $2k$ 歩の path

で，途中で 0 に戻らないものの本数は系 1.9 から $N_{2k-1,2i-1} - N_{2k-1,2i+1}$ に等しいから，(1.24) より，

$$2\mathrm{P}_{2k}[\,W_1 > 0, \ldots, W_{2k-1} > 0, W_{2k} = 2i\,]$$
$$= \mathrm{P}_{2k-1}[\,W_{2k-1} = 2i-1\,] - \mathrm{P}_{2k-1}[\,W_{2k-1} = 2i+1\,]$$

（左辺の 2 は P_{2k} は path の本数を 2^{-2k} 倍するのに対して P_{2k-1} は本数を 2^{-2k+1} 倍するから）となる．以上から

$$\mathrm{P}_{2k}[\,W_1 \neq 0, \ldots, W_{2k} \neq 0\,] = \mathrm{P}_{2k-1}[\,W_{2k-1} = 1\,] = 2^{-2k+1}N_{2k-1,1}$$

となる．(1.24) から $2N_{2k-1,1} = N_{2k,0}$ なので，(1.25) と合わせると主張が成り立つ．

(ii) 最初の等号は上の結果から明らか．これに具体形 (1.25) を適用すれば残りも明らか．　□

スターリングの公式

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}e^{-k}k^k$$

を (1.25) に用いると，簡単な計算で $k \to \infty$ における漸近形

$$u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}, \tag{1.26}$$

を得る（スターリングの公式の証明はたとえば [T9, §5.1], [T10, vol. 1 §II.9] などを参照）．

以上の議論は §2 および §3 の $\mathbb{Z}^n$ 上のランダムウォークの再帰性というたいへん興味深い問題を解く出発点になるが，本書はマルコフ性のある場合には深入りしないので，続きは [T16, 第 2 章] などを参照していただきたい．

1.5.3　到達時刻と再生方程式と滞在時間の arcsine 法則

$x \in \mathbb{Z}$ に対して正値確率変数 $\tau_x:\ \Omega_k \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$\tau_x(w) = \inf\{0 < i \leqq k \mid W_i(w) = x\},\quad w \in \Omega_k,$$

で定義する．ただし，$W_i(w) = x$ となる i が k 以下にないときは便宜上 $\tau_x(w) = \infty$ とおくことにする．τ_x は path w が初めて点 x を通る時刻を与える確率変数であり，点 x の到達時刻 (hitting time) と呼ばれる（到達時刻と言うとき通常は $i = 0$ も許すが，出発点に戻る確率を議論しているので，この節 §1.5.3 では $i = 0$ を除外する）．定義から，

$$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_0 = 2k\ ]. \tag{1.27}$$

補題 1.11 によって，u_{2k} も τ_0 を用いて書くことができる．

命題 1.12　(i) $u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_0 > 2k\ ]$.

(ii) $f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_1 = 2k-1\ ] = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_{-1} = 2k-1\ ] = \mathrm{P}_{2k}[\ W_i \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots, 2k-2,\ W_{2k-1} = -1\ ]$.

(iii) $u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_{-1} > 2k\ ] = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_1 > 2k\ ] = \mathrm{P}_{2k}[\ W_i \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots, 2k\ ]$.

◇

証明　(i) 補題 1.11(i) と (1.27) と τ_0 が正の偶数値しかとらないことから，

$$u_{2k} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_k[\ \tau_0 = 2i\ ] = \mathrm{P}_k[\ \tau_0 > 2k\ ].$$

(ii) 最右辺の等号は τ_{-1} の定義と $W_0 = 0$ から明らか．$\mathrm{P}_{2k}[\ \tau_1 = 2k-1\ ] = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_{-1} = 2k-1\ ]$ は対称性から明らか．以下，$f_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\ \tau_1 = 2k-1\ ]$ を証明する．

反射原理（命題 1.8）において，0 で折り返す代わりに 1 で折り返すことを考えると，0 から 2 への $2k-2$ 歩の path の本数は 0 から 0 への $2k-2$ 歩の path のうち 1 を通るものの本数に等しいことが分かる．したがって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{2k-2}[\ W_{2k-2} = 0\ ] - \mathrm{P}_{2k-2}[\ W_{2k-2} = 2\ ] \\
&\quad = \mathrm{P}_{2k-2}[\ W_i \leqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 2k-3,\ W_{2k-2} = 0\ ] \\
&\quad = \mathrm{P}_{2k}[\ W_i \leqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 2k-3,\ W_{2k-2} = 0\ ].
\end{aligned}$$

一方,

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i=1,2,\ldots,2k-2,\ W_{2k-1}=1\,]$$

であるが, 右辺について, $W_{2k-2} \leqq 0$ かつ $W_{2k-1} = 1$ であるためには $W_{2k-2} = 0$ でないといけないから

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,]\\ &\quad = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i=0,1,\ldots,2k-3,\ W_{2k-2}=0,\ X_{2k-1}=1\,].\end{aligned}$$

ここで定理 1.1 を使うとさらに

$$\begin{aligned}&\quad = \mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i=0,1,\ldots,2k-3,\ W_{2k-2}=0\,]\mathrm{P}_{2k}[\,X_{2k-1}=1\,]\\ &\quad = \frac{1}{2}\mathrm{P}_{2k}[\,W_i \leqq 0,\ i=0,1,\ldots,2k-3,\ W_{2k-2}=0\,].\end{aligned}$$

以上から,

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2}=0\,] - \mathrm{P}_{2k-2}[\,W_{2k-2}=2\,])$$

を得る. 具体形 (1.24) を用いて左辺を計算すれば

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2k-1\,] = \frac{1}{2^{2k-1}}\left(\binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k}\right) = \frac{1}{2k}u_{2k-2}\,.$$

補題 1.11(ii) から右辺はさらに f_{2k} に等しい.

(iii) 補題 1.11(i) と上の結果より

$$u_{2k} = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{2i} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 = 2i-1\,] = \mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1 > 2k\,].$$

□

補題 1.13 (再生方程式)　$u_{2k} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} f_{2\ell}u_{2k-2\ell}\,.$　◇

証明　定義と，path が奇数歩で出発点に戻らないことから，

$$u_{2k} = \mathrm{P}_{2k}[\, W_{2k} = 0 \,] = \sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{P}_{2k}[\, \tau_0 = 2\ell, W_{2k} = 0 \,]. \tag{1.28}$$

さて，$\tau_0(w) = 2\ell$ かつ $W_{2k}(w) = 0$ を満たす path $w \in \Omega_{2k}$ に対して，0 から 0 への 2ℓ 歩の path $w_1 \in \Omega_{2\ell}$ で出発点と到達点以外の途中で 0 を通らないものと，0 から 0 への（途中で 0 を通ってもかまわない）$2(k-\ell)$ 歩の path $w_2 \in \Omega_{2(k-\ell)}$ を，w の最初の 2ℓ 歩が w_1 と一致し，w の残り $2(k-\ell)$ 歩が（歩数を -2ℓ だけずらして数えたときに）w_2 と一致するように選べる．この対応

$$w \mapsto (w_1, w_2) \in \Omega_{2\ell} \times \Omega_{2(k-\ell)}$$

は 1 対 1 全射（そのような w_1, w_2 を持ってきてつなげば $\tau_0(w) = 2\ell$ かつ $W_{2k}(w) = 0$ を満たす $2k$ 歩の path になる）である．$2k$ 歩の path $w \in \Omega_{2k}$ 1 本あたりの確率は 2^{-2k} だが，2ℓ 歩と $2(k-\ell)$ 歩の path 1 本あたりの確率はそれぞれ $2^{-2\ell}$ および $2^{-2(k-\ell)}$ だから，

$$\mathrm{P}_{2k}[\, \tau_0 = 2\ell, W_{2k} = 0 \,] = \mathrm{P}_{2\ell}[\, \tau_0 = 2\ell \,]\, \mathrm{P}_{2(k-\ell)}[\, W_{2(k-\ell)} = 0 \,]. \tag{1.29}$$

(1.22), (1.27), (1.28), (1.29) から

$$u_{2k} = \sum_{\ell=1}^{k} f_{2\ell} u_{2k-2\ell}$$

を得る．　□

定理 1.14 (滞在時間の正弦 (arcsine) 法則)　$\eta_{2k} : \Omega_{2k} \to \mathbb{Z}_+$ を，path $w \in \Omega_{2k}$ が「$W_t(w) > 0$ となる時間幅」を表す確率変数とする．正確に言うと，W_i または W_{i+1} の少なくとも一方が正である i の個数，すなわち，

$$\eta_{2k}(w) = \sharp\{ i \in [0, 2k) \mid \max\{W_i(w), W_{i+1}(w)\} > 0 \}$$

とする．このとき $\mathrm{P}_{2k}[\, \eta_{2k} = 2i \,] = u_{2i} u_{2k-2i}$, $i = 0, 1, \ldots, k$.　◇

証明　$i=0$ のとき，すなわち，$\eta_{2k}=0$ となるのは，path が $2k$ 歩目まで一度も正の値をとらない場合だから，$\tau_1>2k$ と同値である．よって，命題 1.12(iii) から

$$\mathrm{P}_{2k}[\,\eta_{2k}=0\,]=\mathrm{P}_{2k}[\,\tau_1>2k\,]=u_{2k}=u_0u_{2k}\,.$$

すなわち，$i=0$ のとき主張は成り立つ．対称性から $i=k$ についても主張は成り立つ．特に $k=1$ のときは全ての i について主張が成り立つ．

k と i についての帰納法で証明する．上に注意したことから，k を $k-1$ 以下に置き換えた主張は全ての i で成り立ち k については i を $i-1$ 以下に置き換えた主張が成り立つと仮定して，$\mathrm{P}_{2k}[\,\eta_{2k}=2i\,]$ について主張を証明すればよい．$\eta_{2k}=2i$ であるためには，$W_1=1$ ならば遅くとも $2i+1$ 歩目には path は負の部分に入る必要があり，$W_1=-1$ ならば遅くとも $2k-2i$ 歩目には path は正の部分に入る必要がある．したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{2k}[\,\eta_{2k}=2i\,]=&\sum_{\ell=1}^{i}\mathrm{P}_{2k}[\,W_1=1,\tau_0=2\ell,\eta_{2k}=2i\,]\\&+\sum_{\ell=1}^{k-i}\mathrm{P}_{2k}[\,W_1=-1,\tau_0=2\ell,\eta_{2k}=2i\,].\end{aligned}\tag{1.30}$$

再生方程式（補題 1.13）の証明で (1.29) の導出に用いた path をつなぎ合わせる議論を援用する．$W_1(w)=1$ かつ $\tau_0(w)=2\ell$ かつ $\eta_{2k}(w)=2i$ なる path w に対して，w の 2ℓ 歩目までを $w_1\in\Omega_{2\ell}$ とし，$2\ell+1$ 歩目以降の $2k-2\ell$ 歩分だけをとりだした path を $w_2\in\Omega_{2k-2\ell}$（τ_0 の定義から w_2 も 0 を出発点としていることに注意）とする対応

$$w\mapsto(w_1,w_2)\in\Omega_{2\ell}\times\Omega_{2k-2\ell}$$

を考えると，この対応は

$$\{w\in\Omega_{2k}\mid W_1(w)=1,\ \tau_0(w)=2\ell,\ \eta_{2k}(w)=2i\}$$

から

$$\{w_1\in\Omega_{2\ell}\mid W_1(w_1)=1,\ \tau_0(w_1)=2\ell\}\times\{w_2\in\Omega_{2k-2\ell}\mid\eta_{2k-2\ell}(w_2)=2i-2\ell\}$$

への 1 対 1 全射対応を与えていることが分かる．w_2 が $\eta_{2k-2\ell}(w_2) = 2i - 2\ell$ となるのは，w_1 が正のところを 2ℓ 歩の間たどっており，w 全体では η_{2k} の定義から $2i$ 歩の間正のところをたどるので，差し引きすると w_2 が正のところにいるのは $2i - 2\ell$ 歩だからである．このことから，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 = 1, \tau_0 = 2\ell, \eta_{2k} = 2i \,] \\ = \mathrm{P}_{2\ell}[\, W_1 = 1, \tau_0 = 2\ell \,]\, \mathrm{P}_{2k-2\ell}[\, \eta_{2k-2\ell} = 2i - 2\ell \,]. \quad (1.31)\end{aligned}$$

2 項目についても同様に考えれば

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{2k}[\, W_1 = -1, \tau_0 = 2\ell, \eta_{2k} = 2i \,] \\ = \mathrm{P}_{2\ell}[\, W_1 = -1, \tau_0 = 2\ell \,]\, \mathrm{P}_{2k-2\ell}[\, \eta_{2k-2\ell} = 2i \,]. \quad (1.32)\end{aligned}$$

(1.31), (1.32) を (1.30) に代入し，対称性と (1.27) から

$$\mathrm{P}_{2\ell}[\, W_1 = 1, \tau_0 = 2\ell \,] = \mathrm{P}_{2\ell}[\, W_1 = -1, \tau_0 = 2\ell \,] = \frac{1}{2} f_{2\ell}$$

となることに注意して，帰納法の仮定と補題 1.13 を順に用いると

$$\mathrm{P}_{2k}[\, \eta_{2k} = 2i \,] = \frac{1}{2} u_{2k-2i} \sum_{\ell=1}^{i} f_{2\ell} u_{2i-2\ell} + \frac{1}{2} u_{2i} \sum_{\ell=1}^{k-i} f_{2\ell} u_{2k-2i-2\ell} = u_{2i} u_{2k-2i}$$

となって，i のときも主張が成り立つ． □

Arcsine 法則という命名は漸近形の分布の密度関数の形に由来する．

定理 1.15 $0 < a < b < 1$ ならば

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{P}_k\left[\, a \leqq \frac{\eta_{2k}}{2k} \leqq b \,\right] = \frac{2}{\pi} \arcsin y \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}.$$

すなわち，$\eta_{2k}/(2k)$ は分布関数 $\mu([0,x]) = \dfrac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ で定義される $[0,1]$ 上の分布 μ に法則収束する． ◇

証明　定理 1.14 に (1.26) を用いて左辺で変数変換 $x = y^2$ も行うと,

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}_k[\, a \leqq \frac{\eta_{2k}}{2k} \leqq b \,] = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

これより主張を得る. □

Path は 1 歩ごとに右に行くのも左に行くのも自由で k 歩目の位置の期待値は $\mathrm{E}_k[\, W_k \,] = 0$ であるが, 定理 1.15 の分布密度は $x = 0$ と $x = 1$ で発散する. すなわち, 原点をはさんで正の側にばかりいる path や負の側にばかりいる path が（均等に行ったり来たりする path に比べて）多いことを表している（Sample path の実例に基づく詳しい説明が [T10, vol. 1 §III.6] にある）. このように「平均的には原点が中心」ということと「分布が正または負に偏る」ということが共存しているのが典型的な path の一つの不思議な姿である. その上, §2 の定理 2.7 で見るように, 典型的な無限長の path は歩数のおよそ平方根程度を限度として正の方向にも負の方向にも広がっていて, なおいっそう神秘的である.

2章

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク

ランダムウォークは独立同分布確率変数列の和と定義されるのが標準的である．その中で単純ランダムウォークと呼ばれるもっとも単純なもの (§2.1.2) は，§1 で議論した有限歩数の path 集合上の確率測度の (歩数についての) 列と整合する無限長さの path の集合上の確率測度という見方もできる（§2.1.1）．無限長さの path 集合の上の確率測度を扱うためには測度論（ルベーグ積分論）は不可避なので，確率論の必要最小限の用語の定義を補遺 §F に要約する．

§2.2 と §2.3 では大数の法則と重複対数の法則という，1 本の path の歩数についての漸近的性質でもっとも基礎的なものを紹介する．重複対数の法則をマルコフ性を持たない確率連鎖に一般化することが第 II 部 §5 の主目標である．

2.1　単純ランダムウォーク

§1 では有限長さの path 上の確率測度を考えた．Path の種々の性質について歩数無限の極限 $k \to \infty$ も調べたが，各 k ごとに期待値をとったあとで極限をとっている（§1.4 では分布の弱収束を議論したが，分布の弱収束も期待値の収束で定義される（補遺 §F.3)）．命題 1.6 の下でも注意したように，(Ω_k, P_k) という，有限長さの path の集合とその上の確率測度たちしか用意していないので，先に歩数を決めて，その歩数までの path の形状について議論するしかない．極限を議論できるのはいろいろな path について平均したあとになる．裏返して言うと，§1 では 1 本の path の行く先をずっとながめたときに，極限でどうなるかについては何も言えない．

他方，たとえば，目的地めがけて最短で進む path に対して成り立つ (1.12) は，1 本の path が $k \to \infty$ でどうなるかを論じている．この類推で，典型的な path w に対して k 歩目の位置 $W_k(w)$ が $k^{1/2}$ という k 依存性を持つこ

とをたとえば w を選ぶごとに $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ がどうなるか，という問として論じたいが，どんなに大きな k' を持ってきても，それより大きい k を見なければ極限は分からないので，§1 で用意した有限長さの path の確率空間 $(\Omega_{k'},\mathrm{P}_{k'})$ では $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ に関する確率を議論することができない．結論を先取りすると，典型的な path に対しては $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{W_k(w)}{\sqrt{k}}$ なる極限は存在しない．定理 2.7 でみるように $\displaystyle\overline{\lim_{k\to\infty}}$ を考える必要があり，また，分母も $\sqrt{k}$ からずれる．そういうことを議論するためには無限長さの path の集合上の確率空間を用意する必要がある．この節 §2.1 はそのような確率空間を，§1 の有限長さの path の確率空間との関係に注意しながら用意する．

2.1.1　無限長の path の集合上の分布としての単純ランダムウォーク

§1 で用意した k 歩の path の確率空間 (Ω_k,P_k) に関して，異なる k の間の次の関係に注意する．$k\in\mathbb{N}$ とする．原点を出発する $k+1$ 歩の path $w'=(w'(0),w'(1),\ldots,w'(k+1))\in\Omega_{k+1}$ に対して，その最初の k 歩だけをとれば，原点を出発する k 歩の path を得る．この対応を $\pi_{k+1,k}:\ \Omega_{k+1}\to\Omega_k$ と書く：

$$\pi_{k+1,k}(w')=(w'(0),w'(1),\ldots,w'(k))\in\Omega_k\,.$$

この対応は $2:1$ 写像なので，逆関数はないが，逆像 $\pi_{k+1,k}^{-1}$ を path の集合 $A\subset\Omega_k$ に対して

$$\pi_{k+1,k}^{-1}(A)=\{w'\in\Omega_{k+1}\mid\pi_{k+1,k}(w')\in A\}\subset\Omega_{k+1}\,,$$

によって定義する．

命題 2.1　$\mathrm{P}_{k+1}[\,\pi_{k+1,k}^{-1}(A)\,]=\mathrm{P}_k[\,A\,]$, $A\subset\Omega_k$, が全ての $k=0,1,2,\ldots$ に対して成り立つ．　◇

証明　P_k は有限加法性 (1.3) を持つので，A が長さ k の 1 本の path w からなるときに証明すれば十分である．$\pi_{k+1,k}^{-1}(\{w\})$ は最初の k 歩が w に一致するような $k+1$ 歩の path なので $k+1$ 歩目が右か左への 1 歩の二つの $k+1$ 歩の path からなる集合になる．よってその確率は (1 本あたり 2^{-k-1} なので)

$$\mathrm{P}_{k+1}[\,\pi_{k+1,k}^{-1}(\{w\})\,] = 2^{-k-1} \times 2 = 2^{-k}.$$

これは 1 本の k 歩の path の確率 $\mathrm{P}_k[\,\{w\}\,]$ に一致する. □

確率空間の列 (Ω_k, P_k) に対する命題 2.1 のような関係式（整合条件と呼ばれる）があるとき,「親玉」となる確率空間, 今の場合で言えば無限長さの path の集合 Ω （§1.1 で定義した, (1.2) と $w(0) = 0$ を満たす $w:\ \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}$ の集合), の上の確率測度 P_∞ が存在することが, 測度論の一般論から分かっている（補遺 §F 参照).「親玉」と書いたのは, $\pi_{k+1,k}$ の類推で, 無限長さの path の最初の k 歩までを見ることで長さ k の path を対応させる写像を

$$\pi_{\infty,k}:\ \Omega \ni w = (w(0), w(1), \dots) \mapsto (w(0), \dots, w(k)) \in \Omega_k \tag{2.1}$$

とおくとき, 命題 2.1 の類推, つまり,

$$\mathrm{P}_\infty[\,\pi_{\infty,k}^{-1}(A)\,] = \mathrm{P}_k[\,A\,],\ \ A \subset \Omega_k\,,\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

が成り立つ, という意味である. 右辺の A は k 歩の path をいくつか集めた集合, 左辺の $\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ は最初の k 歩部分が A に入っているような無限長さの path を集めた集合だから, 最初の k 歩を決めた無限長さの path の集合の P_∞ による確率がその k 歩部分についての P_k による確率に等しい確率測度という意味である.

補遺 §F に説明する測度論からの結論を要約する. まず, (2.2) を満たす P_∞ は全ての集合 $A \subset \Omega$ に対して値が定まる保証はない. (2.2) を満たすことを優先させるので, 測度を定義できない集合, すなわちどう値を決めても矛盾を起こす集合, があると覚悟する方がすなおである. そこで, 確率測度 P_∞ の定義域, すなわち, $\mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ という値が存在することが保証されている集合 $A \subset \Omega$ たちを集めた集合（集合の集合という意味で集合族と呼ぶ）を $\mathcal{F}$ と書いて, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ の三つ組を明記して確率空間と呼ぶ. §1 の有限長さの path の集合上の確率測度 P_k は Ω_k の任意の部分集合 A に対して $\mathrm{P}_k[\,A\,]$ が存在したため, $\mathcal{F}$ をわざわざ明記する必要がなかった（Ω_k の全ての部分集合を集めた集合族を 2^{Ω_k} と書くことにすれば, §1 で用意した確率空間 (Ω_k, P_k) は, $(\Omega_k, 2^{\Omega_k}, \mathrm{P}_k)$ と書くことになる).

$\mathcal{F}$ は，$\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ の形の集合を全て集めた集合族

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\pi_{\infty,k}^{-1}(A) \mid A \subset \Omega_k\} \tag{2.3}$$

を含む最小の σ 加法族（補遺 §F 参照）に選ぶのが適当であることが分かっている（(2.2) を満たすためには，$\mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ は $\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$, $A \subset \Omega_k$, という形の集合に対して定義されている必要があるが，そのような確率測度は自動的に $\mathcal{F}$ の上で定義されている必要があるので，$\mathcal{F}$ より小さな定義域から始めることはできない）．以上を定理の形にまとめておく．

定理 2.2　原点を出発する無限長さの path の集合 Ω 上の確率測度 P_∞ で，(2.2) を満たすものが存在する．そのような P_∞ は (2.3) を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}$ の上で一意的に定まる（すなわち，(2.2) を満たす別の確率測度 P' があるならば全ての $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{P}'[\,A\,] = \mathrm{P}_\infty[\,A\,]$ となる）．　◇

補遺 §F に測度論の基礎事項からこの定理に至るまでの証明の道筋を説明する．本書では §F の内容（確率論の基礎）を既知として話を進める．

無限長 path の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ においても確率変数 W_i（i 歩目の path の位置，変位）および $X_i = W_i - W_{i-1}$（i 歩目の path の動き，増分）の定義は §1.2 と同様である．

一般に，無限長 path の集合上の確率測度であって有限歩で決まる集合（(2.3) に属する集合）を全て定義域に含んでいるものを確率連鎖と呼ぶ．確率連鎖があれば，$i \in \mathbb{Z}_+$ に対して i 歩目の位置を表す確率変数 $W_i: \ \Omega \to \mathbb{Z}$ が存在するが，$(W_0(w), W_1(w), W_2(w), \dots) = w$ だから，確率変数列 $W_0, W_1, W_2, \dots$ は確率連鎖を定める．一般的には確率連鎖と言うときは無限長であること，すなわち，確率変数列 $W_0, W_1, W_2, \dots$ ということ以上の制約はないが，本書では確率連鎖というとき，sample が本書で言う path，すなわち，各時刻で隣の点に移るもののみを考える．

定理 2.2 が与える確率連鎖 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ は (2.2) と (1.4) から，最初の k 歩が $(w(0), w(1), w(2), \dots, w(k)) \in \Omega_k$ に等しい無限長 path の集合 $\pi_{\infty,k}^{-1}(\{(w(0), w(1), w(2), \dots, w(k))\})$ の確率は最初の k 歩の path の形に無関係に

$$\mathrm{P}_\infty[\,\pi_{\infty,k}^{-1}(\{(w(0),w(1),w(2),\dots,w(k))\})\,]=2^{-k}$$

となる．つまり，P_∞ は有限歩を見る限り一様分布である．この確率連鎖を $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークと呼ぶ．次節 §2.1.2 で「ランダムウォーク」という言葉の語感に沿った書き方を導入する．

小さな注意だが，任意の path $w=(w(0),w(1),w(2),\dots)\in\Omega$ に対して

$$\mathrm{P}_\infty[\,\{w\}\,]=0 \tag{2.4}$$

となる．これは，各 $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して (2.2) において $A=\{\pi_{\infty,k}(w)\}=\{(w(0),w(1),w(2),\dots,w(k))\}\subset\Omega_k$ とおくことで，(1.4) と合わせると

$$\mathrm{P}_\infty[\,\{w\}\,]\leqq\mathrm{P}_k[\,\{(w(0),w(1),w(2),\dots,w(k))\}\,]=2^{-k}$$

が任意の $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つことから分かる．1 本ごとの無限長 path の確率からは P_∞ のことは何も分からない．

この節では k 歩の path の集合上の確率測度の k に関する列から整合条件（命題 2.1）に基づいて確率連鎖を構成した（存在を証明した）が，逆に確率連鎖があるとその k 歩目まで $(W_0,W_1,W_2,\dots,W_k)$ を考えることで（言い換えると，$W_0,W_1,W_2,\dots,W_k$ の結合分布 $\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\dots,W_k)^{-1}$ を考えることで）k 歩の path の集合上の確率測度が定まり，整合条件を満たす．ここで，$\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\dots,W_k)^{-1}$ は，Ω_k 上の確率測度で，$w\in\Omega_k$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\dots,W_k)^{-1}[\{w\}]\\&\qquad=\mathrm{P}_\infty[\,\{w'\in\Omega\mid(W_0(w'),W_1(w'),W_2(w'),\dots,W_k(w'))=w\}\,]\end{aligned}$$

とおくことで定義される．

単純ランダムウォークでは，整合条件 (2.2) と (1.4) から

$$\mathrm{P}_\infty\circ(W_0,W_1,W_2,\dots,W_k)^{-1}[\{w\}]=2^{-k},\quad w\in\Omega_k,$$

となる．

一般に各 $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して Ω_k 上の確率空間が与えられているとき，仮に，path 上の確率が定義されている，ということにする．path 上の確率が整合条件を満たしていなければ，対応する確率連鎖は存在しないが，その場合でも §1 のように，変位の指数を含む期待値の意味で長い path の漸近的な性質を議論できる．§4 で紹介する $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path の上の一様分布は整合条件を満たさない path 上の確率の例である．したがって，self-avoiding path と単純ランダムウォークを統一的にながめるときは path 上の確率を考えるのが適当である．他方，単純ランダムウォークの特徴的な性質は確率連鎖としての見方のほうが把握しやすい．通常は単純ランダムウォークは確率連鎖として導入する．

2.1.2　独立同分布確率変数列の和としての単純ランダムウォーク

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ の増分（i 歩目の動きを表す確率変数）$X_i = W_i - W_{i-1}$ $(i \in \mathbb{N})$ について，独立性（補遺 §F (F.24)）を調べる．

Path の定義（1 歩につき左右どちらかにしか動かないこと）から X_i は ± 1 のどちらかの値をとるので，(F.24) の条件は極めて簡単になる．すなわち，$X_1, X_2, X_3, \ldots$ が独立であることと任意の有限個の添字 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ に対して

$$\mathrm{P}_\infty[\, X_{i_1} = 1, X_{i_2} = 1, \ldots, X_{i_k} = 1 \,] = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}_\infty[\, X_{i_j} = 1 \,] \tag{2.5}$$

が成り立つことは同値である（その証明は簡単な練習問題である）．左辺は事象

$$C = \{w \in \Omega \mid X_{i_1}(w) = 1, X_{i_2}(w) = 1, \ldots, X_{i_k}(w) = 1\} \tag{2.6}$$

の P_∞ に関する確率を表す約束であった．

定理 2.3　$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク，すなわち，定理 2.2 で与えられた無限長 path 集合上の確率測度 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ の上の i 歩目の動きを表す確率変数 $X_i \colon \Omega \to \{\pm 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ に対して，(2.5) および

$$\mathrm{P}_\infty[\, X_i = 1 \,] = \mathrm{P}_\infty[\, X_i = -1 \,] = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

が成り立つ． ◇

証明 (2.5) でいちばん大きい添字は i_k なので，i_k 歩の path の集合 Ω_{i_k} の部分集合

$$A = \{w' \in \Omega_{i_k} \mid X_{i_1}(w') = 1, X_{i_2}(w') = 1, \ldots, X_{i_k}(w') = 1\}$$

を用いて (2.6) の C は $C = \pi_{\infty,i_k}^{-1}(A)$ と書くことができる．よって，整合条件 (2.2) から

$$\mathrm{P}_\infty[\, C\,] = \mathrm{P}_{i_k}[\, A\,]$$

を得る（細かいことだが，たとえば (2.6) の中の X_i は Ω 上の関数なのに対して上の A の右辺の X_i は Ω_{i_k} 上の関数である．ただし，どちらもそれぞれの path の i 歩目の動きを表すので，整合条件 (2.2) から，上の式が成り立つ．元々そのことを見越して異なる関数に同じ記号を用いた．以下，この種の細かい注意を省略する）．ここで，有限長さの path の結果（定理 1.1）を（k を i_k におきかえ，$j = i_k$, を初め，適宜添字をつけなおした上で $f(x) = \delta_{x,1}$ および $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}) = \delta_{x_{i_1},1}\,\delta_{x_{i_2},1} \cdots \delta_{x_{i_{k-1}},1}$ として）使うと，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{i_k}[\, A\,] &= \mathrm{P}_{i_k}[\, X_{i_1} = X_{i_2} = \cdots = X_{i_k} = 1\,] \\
&= \mathrm{E}_{i_k}[\, \delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1} \cdots \delta_{X_{i_k},1}\,] \\
&= \mathrm{E}_{i_k}[\, \delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1} \cdots \delta_{X_{i_{k-1}},1}\,]\,\mathrm{E}_{i_k}[\, \delta_{X_{i_k},1}\,] \\
&= \mathrm{E}_{i_k}[\, \delta_{X_{i_1},1}\,\delta_{X_{i_2},1} \cdots \delta_{X_{i_{k-1}},1}\,]\,\mathrm{P}_{i_k}[\, X_{i_k} = 1\,]
\end{aligned}$$

となって，以下帰納的に

$$\mathrm{P}_{i_k}[\, A\,] = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{P}_{i_k}[\, X_{i_j} = 1\,]$$

に至るが，$\mathrm{P}_\infty[\, C\,] = \mathrm{P}_k[\, A\,]$ と同様の理由で

$$\mathrm{P}_{i_k}[\, X_{i_j} = 1\,] = \mathrm{P}_\infty[\, X_{i_j} = 1\,]$$

であることから (2.5) が成り立つ．

(2.7) も定理 1.1 から同様の議論で得られる． □

単純ランダムウォークを，有限歩の path 上の一様分布を無限長に拡張した確率測度として導入したが，i 歩目を表す確率変数 X_i たちが独立で (2.7) という同一の分布に従うことが分かった．このことを，通常，確率変数列 X_i, $i \in \mathbb{N}$, が独立同分布である (independent, identically distributed) と言い，i.i.d. と略記する．

ところで，path の集合とは限らないある確率空間 $(\Omega', \mathcal{G}, \mathrm{P})$ と，その上の確率変数の列で ± 1 に値をとるもの $X_i\colon\ \Omega' \to \{\pm 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, があって，(2.5) と (2.7) が成り立っているとする．すなわち，X_i, $i \in \mathbb{N}$, は独立同分布確率変数列で，とりうる二つの値 ± 1 を等確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつでとるとする．X_i たちの和

$$W_k = \sum_{i=1}^{k} X_i\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \quad W_0 = 0, \tag{2.8}$$

によって $W_i\colon\ \Omega' \to \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, を定義し，その結合分布 $\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1}$ を考える．ここで $\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1}$ は無限長 path の集合 Ω の上の確率測度で，$A \subset \Omega$ に対して

$$\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1}[A] = \mathrm{P}[\ (W_1(w), W_2(w), \ldots) \in A\ ]$$

によって（右辺が存在するとき）定義される．

定理 2.4　$\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1}$ は原点を出発する $\mathbb{Z}$ 上の無限長 path の集合 Ω の上の確率測度で，その定義域は定理 2.2 の $\mathcal{F}$ を含み，かつその上で $\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1} = \mathrm{P}_\infty$ を満たす．　◇

証明　確率測度と確率変数の定義から像測度は確率測度になり，特にその定義域は σ 加法族になる（補遺 §F.1）．また，最初の有限歩で定まる無限長の path の集合（ある $A \subset \Omega_k$ によって $\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ と書ける集合）は定義域に含まれる．よってその定義域は定理 2.2 の $\mathcal{F}$ を含む．定理 2.2 の一意性から，$\pi_{\infty,k}^{-1}(A)$ の形の集合に対して $\mathrm{P} \circ (W_1, W_2, \ldots)^{-1}$ と P_∞ が等しいことを言えば十分であるが，それは，定理 1.1 や定理 2.3 の証明の議論と同様に定義に戻ればよい．　□

定理 2.3 と定理 2.4 によって，§2.1.1 で無限長 path 上の確率測度として定義した単純ランダムウォークは，本質的に，±1 を等確率でとる独立同分布確率変数列の和の列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, と同値であることが分かった．単純ランダムウォークというときは後者を定義とするのが普通である． 後者の定義は，直感的には，公平な硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれコマを進める，という規則のすごろくで，k 回目の動きの後のコマの位置を W_k で表す，ということを意味する．それが k 歩目までの path の一様分布と同じ確率を与えるというのが定理 2.3 と定理 2.4 の結論である．

後者の定義では確率変数列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$ がどのような確率空間 $(\Omega', \mathcal{G}, \mathrm{P})$ の上にあるかは全く関係ない．指定された性質（増分が独立同分布で ±1 を等確率でとる）を持つ確率変数列がとれるほど大きければ何でもよい（そのような確率空間が存在することは単純ランダムウォークの §2.1.1 の定義と定理 2.3 によって保証される）．こうして，確率空間を指定してその中の事象の確率を論じることと，確率空間を指定せず確率変数を指定してそれで書かれた事象の確率を論じることは同じ数学的記述能力を持っていることが分かる．このような 2 種類の書き方の行き来は確率論では（確率連鎖の問題に限らず）ごく普通に行われることで，本書でも断りなく自由に用いる．

§2.1.1 で path 上の確率測度（であって，有限歩で決まる集合を全て定義域に含むもの）として確率連鎖を定義したが，以上の議論から，可算無限個（自然数で番号づけることができる無限を可算無限と言う．実数の集合は自然数で番号づけられないので非可算無限集合である）の確率変数列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, を確率連鎖と呼んでもよい （以後両者を区別しない）．k を時刻あるいは歩数，W_k たちの値域を状態空間と言う．$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークは $\mathbb{Z}$ を状態空間とする確率連鎖である．$\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖には単純ランダムウォーク以外にも非常にたくさんのものがある．第 II 部の §5 では第 I 部では扱わない確率連鎖も取り上げる．

2.2 大数の法則

§1.4 で取り上げた中心極限定理が確率変数列の弱収束についてのもっとも有名な基本定理だとすると，確率変数の概収束についてのおそらくもっとも

有名な基本定理が大数の法則だろう．

$\mathbb{Z}$ 上の原点から出発する単純ランダムウォーク $W_k,\ k \in \mathbb{Z}$,（または，§2.1.1 で定義した無限長 path 空間 Ω 上の確率測度 P_∞）に対しては，X_1 が ± 1 の値しかとらないので $\mathrm{E}[\,X_1^4\,] = 1 < \infty$ だから，補遺 §F.3 の定理 F.18 から直ちに次が成り立つ．

命題 2.5 (単純ランダムウォークの大数の法則) $\mathbb{Z}$ 上の原点から出発する単純ランダムウォーク $W_k,\ k \in \mathbb{N}$ に対して，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k = 0$, a.e., が成り立つ． ◇

ここで「a.e.」は「ほとんど全ての $w \in \Omega$ に対して」と読み，たとえば $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k = 0$, a.e., とは，

$$\mathrm{P}\left[\left\{ w \in \Omega \;\middle|\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} W_k(w) = 0 \right\}\right] = 1,$$

を意味する（補遺 §F.1）．

命題 1.5 と定理 2.2 から $\dfrac{1}{\sqrt{k}} W_k$ の P_∞ の下での分布が $k \to \infty$ のとき平均 0，分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に弱収束する（中心極限定理）．$\dfrac{1}{k} W_k$ はさらに $\sqrt{k}$ で割っているので，0 に集中した単位分布（補遺 §F.1）に弱収束することはすでに分かっている．もちろん弱収束は，1 歩ごとに全ての path を見渡してその分布をとりながら極限をとるのに対して，大数の法則は概収束，すなわち 1 本の path ごとに極限を見ているので，中心極限定理のほうが $\sqrt{k}$ という（k に比べて）精密な情報（指数）を与えているからといって，中心極限定理から大数の法則が得られるのではない．別途証明すべきものである．

単純ランダムウォークにおける大数の法則の精密化，すなわち，概収束に関して「正しい指数」$k^{1/2}$ を持つ定理は次節 §2.3 で紹介する重複対数の法則である．

2.3 重複対数の法則

重複対数の法則も古くから知られている単純ランダムウォークの漸近的性質である [T5, §7.9], [T10, vol. 1 §VIII.5]．前節 §2.2 の最後で注意したよう

に中心極限定理（命題 1.5）から期待される path の漸近的振る舞いは

$$W_k \doteqdot k^{1/2} \quad (?)$$

なので，大数の法則（命題 2.5）が保証する

$$W_k = o(k), \ a.e.,$$

とは指数に $\frac{1}{2}$ の開きがある．

次のことが知られている．

命題 2.6　$\epsilon > 0$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W_k}{k^{1/2+\epsilon}} = 0, \ a.e..$$

◇

マルコフ性と任意次のモーメントが存在することを用いて補遺の定理 F.18（大数の法則）と同様の証明で命題 2.6 を得ることができる（[T1, §1.3] を参照．以下の議論に用いないのでここでは証明は略す．なお，定理 2.7 から命題 2.6 が得られることは明らか）．

命題 2.6 の「$\epsilon \to 0$」に相当するぎりぎりの評価は，重複対数の法則として知られる．

定理 2.7 (重複対数の法則)　$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に対して次が成り立つ．

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} = 1, \quad a.e..$$

◇

注 2.8　(i) 大数の法則命題 2.5 などでは極限が存在するので主張が lim を用いて書かれていたが，重複対数の法則では $\overline{\lim}$ に関する主張である．これは，符号に関する対称性から

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}} = -\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W_k}{\sqrt{k \log\log k}}$$

となる（しかも 0 でない）ので，極限 lim が存在しないからである．

(ii) 大数の法則からも想像できるし，すごろくや賭事の直感からはなおさら明らかだろうが，W_k は正の値も負の値も無限回とる（path の言葉で言えば出発点 0 に無限回戻る）ので，W_k の絶対値の下極限は $\varliminf_{k\to\infty} |W_k| = 0$ となる．特に，極限 $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|W_k|}{\sqrt{k\log\log k}}$ も存在しない．

(iii) 中心極限定理（命題 1.5）から示唆される指数 $k^{1/2}$ に比べて，重複対数の法則は名前通り $(\log\log k)^{1/2}$ のずれがある．これは指数がずれていると理解するべきではなく，指数 1/2 で正規分布に収束する原因となる path のぎざぎざな動きそのものが $k^{1/2}$ の回りの揺らぎを生むためと理解するのが妥当である（第 II 部 §5.4 で紹介する下からの評価の証明はそのような構造になっている）．

(iv) 今日ではまずブラウン運動について重複対数の法則を証明し，単純ランダムウォークはブラウン運動に近いこと（不変原理，almost sure invariance principle）を言うことで単純ランダムウォークの重複対数の法則を証明するのが常道のようである [T5, §7.9]．極めて重要な視点だが，連続極限そのものへの言及は本書では行わない．　◇

定理 2.7 は，上からの評価

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{W_k}{\sqrt{k\log\log k}} \leqq C_+\,,\ a.e., \tag{2.9}$$

と下からの評価

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{W_k}{\sqrt{k\log\log k}} \geqq C_-\,,\ a.e., \tag{2.10}$$

が $C_+ = C_- = 1$ で成り立つことと同値であるが，path の性質としての意味は上からの評価と下からの評価で全く違うので，以下で分けて説明する．

なお，本書では，定理 2.7 より定数のとりかただけ弱い主張，すなわち，ある $C_+ > 1$ と $0 < C_- < 1$ に対して (2.9) と (2.10) を証明する．主張を弱める意図は，単純ランダムウォークだけでなく，より広い確率連鎖に対して成り立つ結果を紹介することにある（$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに対する定理 2.7 そのもの，すなわち $C_+ = C_- = 1$ の場合の証明は，たとえば [T10, §VIII.5] を参照していただきたい）．

下からの評価 重複対数の法則は広くマルコフ過程全体に対して成り立つことが古くから知られていたが，伝統的な証明は下からの評価 (2.10) の証明においてマルコフ性を本質的に利用している．たとえば [T10, §VIII.5] の証明では，ボレル・カンテリの第 2 定理（補遺の定理 F.10）を用いて下記の上からの評価で用いる (2.11) に類似の下からの評価（単純ランダムウォークではドモアブル・ラプラスの中心極限定理から得られる）と組み合わせる．

しかし，下からの評価は「平均的な path の動き」から無限回はみ出すこと（全ての時刻を監視する必要はない），平たく言えば path がぎざぎざしていること，が本質である．逆に言えばマルコフ性は本質ではないはずである．実際，くりこみ群の視点，すなわち，細かい構造の繰り返し（大小あらゆるスケールのぎざぎざが存在すること）に基づく証明が可能であり，この証明はマルコフ性を持たない確率連鎖にも適用可能である．この新しい視点について第 II 部で議論し，その応用として，マルコフ連鎖でなくても成り立つように (2.10) を拡張した主張の証明を §5.4 で紹介する．

上からの評価 上からの評価 (2.9) の意味は，path が平均的な動きに比べて遠くに飛びすぎないことを表す（ただし，下からの評価と対照的に有限個の時刻を除いて全ての時刻で監視する必要がある）．本書で考える確率連鎖は sample が本書で言う path，すなわち 1 歩ごとに隣の点に移るので 1 歩で遠くへ飛ばない．マルコフ性は本質ではないし，既存の証明も，無条件に成り立つボレル・カンテリの第 1 定理（補遺 §F の定理 F.9）を用いる．

定理 2.9 (単純ランダムウォークの重複対数の法則の上からの評価) $\mathbb{Z}$ 上の原点を出発する単純ランダムウォークでは，ある定数 $C_+ > 0$ に対して (2.9) が成り立つ． ◇

第 II 部 §5.4 で扱う確率連鎖一般に通用する部分と単純ランダムウォーク固有の部分を分離して証明する．次の定理は単純ランダムウォークでなくても成り立つ部分である（今は W_k は単純ランダムウォークと思って読めば十分である）．

定理 2.10　$W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, を $\mathbb{Z}$ に値をとる確率連鎖とする．もし，$C_{+,i} > 0$, $i = 1,2,3$, と $u_+ > C_{+,2}^{-(1-\nu)}$ と $0 < \nu < 1$ を満たす定数たち u_+, ν が存在して，

$$\mathrm{P}[\max_{0 \leqq j \leqq k} |W_j| \geqq x\ ] \leqq C_{+,1} e^{-C_{+,2}(xk^{-\nu})^{1/(1-\nu)}},$$
$$0 \leqq x \leqq u_+ k^{\nu} (\log\log k)^{1-\nu},\ k \geqq C_{+,3}\,, \tag{2.11}$$

が成り立てば，

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{\psi(k)} \leqq C_{+,2}^{-(1-\nu)},\ a.e., \tag{2.12}$$

が成り立つ．ここで

$$\psi(k) = k^{\nu}(\log\log k)^{1-\nu},\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.13}$$

とおいた．　◇

証明　$\lambda > 1$ を任意にとる．仮定から $\lambda > a^{\nu} > \lambda \dfrac{1}{u' C_{+,2}^{1-\nu}}$ と $a > 1$ と $C_{+,2}^{-(1-\nu)} < u' < u_+$ を満たす定数 a と u' が存在する．ψ が増加関数であることに注意して，仮定を $k = [a^{i+1}]$, $x = \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)} \psi(a^i)$ で使う．$a > 1$ と $\nu > 0$ から

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\psi(a^i)}{\psi([a^{i+1}])} = \frac{1}{a^{\nu}}$$

となることから，十分大きい i_0 に対して $i \geqq i_0$ で (2.11) を用いることができて，

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \mathrm{P}\left[\max_{a^i \leqq j < a^{i+1}} \frac{|W_j|}{\psi(j)} \geqq C_{+,2}^{-(1-\nu)} \lambda\right] \leqq \sum_{i \geqq i_0} \mathrm{P}[\max_{j < a^{i+1}} |W_j| \geqq \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)} \psi(a^i)\ ]$$
$$\leqq \sum_{i \geqq i_0} C_{+,1} (i \log a)^{-(\lambda a^{-\nu})^{1/(1-\nu)}} < \infty.$$

よってボレル・カンテリ第 1 定理（補遺 §F 定理 F.9）から，ほとんど全ての $w \in \Omega$ に対して，ある $i_1 = i_1(w)$ が存在して，

$$\max_{a^i \leqq j < a^{i+1}} \frac{|W_j(w)|}{\psi(j)} < \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)},\quad i = i_1, i_1+1, i_1+2, \ldots.$$

すなわち,

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{|W_j(w)|}{\psi(j)} \leqq \lambda C_{+,2}^{-(1-\nu)}.$$

これが任意の $\lambda > 1$ に対して成り立つから，全ての $\lambda = 1 + p^{-1}$, $p \in \mathbb{N}$, についてこれが成り立つ $w \in \Omega$ を集めた集合を考えると，その確率は σ 加法性から 1 であって，しかもそのような w に対して

$$\varlimsup_{j\to\infty}\frac{|W_j(w)|}{\psi(j)} \leqq C_{+,2}^{-(1-\nu)}.$$

すなわち確率 1 で (2.12) が成り立つ. □

定理 2.9 の証明を完成するためには W_k が単純ランダムウォークのとき定理 2.10 の仮定 (2.11) が成り立つことを示す必要がある．中心極限定理からは $y = xk^{-\nu}$ ($\nu = 1/2$) を固定して $k \to \infty$ としたときに (2.11) に対応する評価が成り立つが，(2.11) は変数 x の範囲に関して中心極限定理よりも少し遠いところまで達した path についても評価を必要としているので中心極限定理だけでは不十分である．単純ランダムウォークでは直接 $x = O(k^{\nu+1/2-\epsilon}) = O(k^{1-\epsilon})$ ($\epsilon > 0$) で必要な評価を得られる．その準備として命題 1.8 を思い出す.

系 2.11 (命題 1.8 の系) W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, を原点を出発する $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークとし，点 $x \in \mathbb{Z}$ の到達時刻を τ_x と書く．すなわち,

$$\tau_x(w) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid W_i(w) = x\} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}, \quad w \in \Omega.$$

このとき,

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} W_j \geqq x\,] = \mathrm{P}[\,\tau_x \leqq k\,] \leqq 2\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,], \ x, k \in \mathbb{N}.$$

◇

証明 到達時刻の定義と，命題 1.8 で空間座標を x ずらして時間を反転させた主張を考えると，$y > 0$ のとき

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} W_j \geqq x,\ W_k = x - y\,] = \mathrm{P}[\,W_k = x + y\,]$$

となるから，y について加えると，

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} W_j \geqq x,\ W_k < x\,] = \mathrm{P}[\,W_k > x\,]$$

を得るので，自明の関係式

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} W_j \geqq x,\ W_k \geqq x\,] \leqq \mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,]$$

と合わせることで結論を得る． □

定理 2.9 の証明　チェビシェフの不等式と 1 歩ごとの動き X_k, $k\in\mathbb{N}$, が独立同分布であることと (2.5) から

$$\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \leqq e^{-\lambda x}\mathrm{E}[\,e^{\lambda W_k}\,] = e^{-\lambda x}\mathrm{E}[\,e^{\lambda X_1}\,]^k = e^{-\lambda x}(\cosh\lambda)^k$$

が任意の $x\in\mathbb{R}$ と $\lambda\geqq 0$ と $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して成り立つので，$\lambda = x/k$ とすると，

$$\mathrm{P}[\,W_k \geqq x\,] \leqq e^{-x^2/k}\left(\cosh\frac{x}{k}\right)^k,\quad x>0,\ k>0.$$

$\epsilon>0$ と $C>0$ を任意に固定する．$C'>0$ を $\cosh\dfrac{C}{C'^{\epsilon}}\leqq 3$ となるようにとると，$0<x\leqq Ck^{1-\epsilon}$, $k\geqq C'$ のとき，$\cosh\dfrac{x}{k}\leqq 3$ となるので，テーラーの定理から

$$\cosh\frac{x}{k} \leqq 1+\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x^4}{24k^4}\cosh\frac{x}{k} \leqq 1+\frac{x^2}{2k^2}+\frac{x^4}{8k^4} \leqq e^{x^2/(2k^2)}$$

となる．よって $\mathrm{P}[\,W_k\geqq x\,]\leqq e^{-x^2/(2k)}$ を得る．系 2.11 から $\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} W_j \geqq x\,]$ についても定数を除いて同様の評価が成り立つ．対称性から，$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k} |W_j| \geqq x\,]$ についても同様である．よって定理 2.10 から重複対数の法則の上からの評価 (2.11) を $\nu=\dfrac{1}{2}$ で得る． □

3章

$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク

§2 で $\mathbb{Z}$ を状態空間とする確率連鎖を考えた．その定義として，$\mathbb{Z}$ を値域とする確率変数の列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, という定義と $\mathbb{Z}$ 上の無限長 path の上の確率測度 P_∞ という定義の二つを紹介した．さらに単純ランダムウォークの場合に，有限長で決まる集合（筒集合と呼ぶ）を全て含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}$ 上では両者の定義が同値で，筒集合で確率を定めれば $\mathcal{F}$ 上で一意的に決まることも説明した（その説明では単純ランダムウォークであることは何も使わなかったので，一般の確率連鎖で成り立つ）．

Path 上の確率測度やランダムウォークという概念は状態空間が何であっても考えることができる．この節 §3 では，一般的なネットワーク上でランダムウォークを定義し，マルコフ性を持つ確率連鎖で強力であったいくつかの概念を紹介する．第 II 部でマルコフ性によらない方法としてのくりこみ群を紹介して，伝統的なマルコフ性を反映した解析手段とくりこみ群の可能性の著しい違いを明確にしたい．

3.1 ネットワーク上のランダムウォーク

3.1.1 ネットワーク

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, は $\mathbb{Z}$ に値をとり，1 歩ごとに今いる点から ± 1 の点のいずれかに移る．つまり

$$\mathrm{P}[\,W_{k+1} = x \mid W_k = y\,] \neq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \{y \pm 1\}$$

である．$x \in \{y \pm 1\}$ を満たす点の組 (x, y) を全て線分で結ぶと，隣り合う整数点をつないだネットワーク（グラフ）を得る（図 3.1）．

ここでネットワークあるいはグラフとは，点の集合 G と点の対（辺）の集合 B の組 $F = (G, B)$ を指定することを言う．本書では G の要素は高々可算

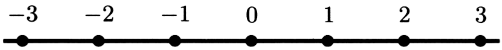


図 3.1

個（有限個または自然数で番号づけられる）とし，2点 $(x,y) \in G \times G$ に対して辺は0本（$(x,y) \notin B$, 直接つながっていない）または1本（$(x,y) \in B$, 直接つながっている）のどちらかとする．ここで，以後 (x,y) は順序は問わない意味で使う（言い換えると，(x,y) と (y,x) を同一視する）．2点が直接つながっているということを隣り合っているともいうことにする．(x,x) という形の辺も本書の問題では意味がないので考えない．また，1点から出ている辺の本数は有限とする．

G を辺で結ばれてない二つの部分に分けられるならば，各部分を個別に考えれば十分なので，以下，ネットワーク (G,B) は全体としてつながっているとする．この節 §3 で主に考えるのは，$n = 1,2,3,\ldots$ に対して $\mathbb{Z}^n$ の距離1の点どうしをつないだネットワーク（n 次元立方格子）である．簡単のためこの場合には辺の集合を省略して，単に $\mathbb{Z}^n$ と書くことにする（点の集合として $\mathbb{Z}^n$ と書いているのかネットワークとして見ているかの混乱は起こらないだろう）．$\mathbb{Z}^n$ 以外の典型的なネットワークの例として，第II部 §6.1 以降では pre-gasket と呼ばれるフラクタルネットワークを扱う．

3.1.2　ネットワーク上の path

ネットワーク (G,B) 上の有限長さの path とは，G の有限列 $w(0), w(1), \ldots, w(k)$ であって列の中の隣り合う要素はネットワークで隣り合っているものをいう．すなわち，非負整数 k に対して $(w(0), w(1), \ldots, w(k))$ が (G,B) 上の長さ k の path であるとは，

$$w(i) \in G,\ i = 0,1,2,\ldots,k, \quad (w(i), w(i+1)) \in B,\ i = 0,1,2,\ldots,k-1,$$

となっていることを言うことにする．誤解がないときは B を省略して G 上の有限長さの path などともいうことにする．長さという言葉の代わりに歩数，時刻など自由に使う．

明らかに，§1.1 の $\mathbb{Z}$ 上の有限長さの path の定義は，ネットワークとして $\mathbb{Z}$（辺の集合は隣り合う整数の組）と置いた場合のネットワーク上の有限長さの path の定義に一致する．

k を path の長さと呼び，path w の長さを $L(w)$ と書くのは §1.1 のときと同様とする．無限に長い path を考えることも，$\mathbb{Z}$ の場合と同様である．(G,B) 上の無限長の path とは関数 $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$（G の要素の無限列 $w=(w(0),w(1),w(2),\ldots)$）であって，

$$(w(i),w(i+1)) \in B,\ i=0,1,2,\ldots, \tag{3.1}$$

を満たすものをいい，$L(w)=\infty$ と書く．

G の特定の点を指定して原点 O と名付けてあるとき，出発点が原点 $(w(0)=O)$ で長さが k $(L(w)=k)$ の path を全て集めた集合を Ω_k, $w(0)=O$ かつ $L(w)=\infty$ の path を全て集めた集合を Ω とする．$w \in \Omega \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ をまとめて (G,B) 上の（あるいは，誤解の恐れがなければ G 上の）path とよび，その長さを $L(w)$ と書く．

3.1.3　ネットワーク上の単純ランダムウォーク

§2 で $\mathbb{Z}$ を状態空間とする確率連鎖を定義したが，集合 G を状態空間とする確率連鎖も全く同様に定義できる．すなわち，ある確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上の可算個の確率変数列 $W_k:\ \Omega \to G$, $k \in \mathbb{Z}_+$, であって，sample が path になっているもの，言い換えると全ての $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\mathrm{P}[\,W_{k+1}=y \mid W_k=x\,] > 0 \quad\Longrightarrow\quad (x,y) \in B \tag{3.2}$$

を満たすものをネットワーク (G,B) 上の確率連鎖と呼ぶ．ここで $X:\Omega \to G$ が確率変数であるとは，整数に値をとる確率変数の定義（補遺 (F.3)）において $\mathbb{Z}$ を G にとりかえた条件

$$\{w \in \Omega \mid X(w)=x\} \in \mathcal{F},\quad x \in G, \tag{3.3}$$

を満たすことを言う（本書でネットワークと言うとき G が高々可算個の場合しか扱わないのでこの定義で十分である）．(3.2) の左辺に出てくる

量（1 歩で隣の点に移る確率）は，単純ランダムウォークなどのマルコフ連鎖では確率連鎖を決めてしまう重要な量である（§3.3.2）．条件付き確率 $\mathrm{P}[\,A \mid B\,] = \dfrac{\mathrm{P}[\,A \cap B\,]}{\mathrm{P}[\,B\,]}$ はこの定義の右辺の分母が 0 でないときのみ定義する．すなわち，(3.2) は $\mathrm{P}[\,W_k = x\,] > 0$ の場合だけ要求する．また，

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}[\,W_{k+1} = y \mid W_k = x\,]\\&\qquad = \mathrm{P}[\,\{w \in \Omega \mid W_{k+1}(w) = y\} \mid \{w \in \Omega \mid W_k(w) = x\}\,]\end{aligned}$$

のような省略記法を用いることは今までと同様である．§2 で $\mathbb{Z}$ を状態空間とする確率連鎖の定義ではあからさまには (3.2) に相当する式を書かなかったが，sample が §2 の意味で path になるもの，という条件がこれに相当することは明らかだろう．

§2 の議論と同様の考察を行えば，この定義は §3.1.2 で定義したネットワーク (G, B) 上の無限長の path の集合 Ω の上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ であって，有限歩で決まる集合が定義域 $\mathcal{F}$ に含まれているもの，を指定することと同値である． ここで $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して，k 歩で決まる G 上の path の集合とは，(2.1) と同様に，G 上の無限長の path $w \in \Omega$ に対してその最初の k 歩を対応させる写像

$$\pi_{\infty,k} :\ \Omega \ni w = (w(0), w(1), \dots) \mapsto (w(0), \dots, w(k)) \in \Omega_k$$

を用意するとき，$A \subset \Omega_k$ をうまくとって

$$\pi_{\infty,k}^{-1}(A) \tag{3.4}$$

と書ける集合を指す．(2.3) にならって，有限歩で決まる集合（事象）を全て集めた集合族を考えると，その上で確率測度を決めればそれを含む最小の σ 加法族で確率測度が一意的に決まることも §2 と同様に測度論の一般論から分かる．

(G, B) 上の確率連鎖，というだけならばいろいろなものがあるが，$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに相当する，もっとも単純な確率連鎖を探しておこう．今まで通り，G の特定の点 O を原点として指定してあるとして O から出発する $(W_0(w) = 0)$ 確率連鎖を考える．

まず§2.1.1の方針に従って，原点を出発する有限長さのpath上の一様分布を考え，（命題2.1においてΩ_kを(G,B)上のk歩のpathの集合に読み替えた意味の）整合条件があれば（定理2.2においてΩ_kを(G,B)上のk歩のpathの集合に読み替えた意味の）拡張定理を用いて確率連鎖を構成できる，という筋書きを考える．これは整合条件さえあれば一般的に通用する方針だが，一般のネットワークでは長さkのpath上の一様分布P_kに対して，異なるkの間に整合条件が成り立つとは限らない．一様分布の列P_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に整合条件（命題2.1）が成り立つのは，Gの各点から出ている辺の数

$$c = c_x = \sharp\{y \in G \mid (x,y) \in B\} \tag{3.5}$$

がxによらない定数の場合であり，その場合に限ることは簡単な練習問題である．このとき，原点を出発するk歩のpathの総本数は

$$\sharp\Omega = c^k \tag{3.6}$$

となるので，1本$(w \in \Omega_k)$あたりの確率は$\mathrm{P}_k[\ \{w\}\ ] = c^{-k}$となり，定理2.2と全く同様に有限長さのpath上の一様分布P_kと整合する確率連鎖が存在する．結果だけをまとめておく．

定理 3.1　原点Oが指定されたネットワーク(G,B)において，Gの各点から出ている辺の数（(3.5)の$c = c_x$）がxによらない定数ならば，原点を出発する無限長さのpathの集合Ω上の確率測度P_∞で，

$$\mathrm{P}_\infty[\ \pi_{\infty,k}^{-1}(A)\ ] = \mathrm{P}_k[\ A\ ] = c^{-k}\sharp A,\quad A \subset \Omega_k\,,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{3.7}$$

((2.2)においてΩやΩ_kを(G,B)上のpathに読み替えたもの，以下同様)を満たすものが存在する．

そのようなP_∞は(2.3)を含む最小のσ加法族$\mathcal{F}$の上で一意的に定まる(すなわち，(2.2)を満たす別の確率測度Pがあって(2.2)を満たすならば，全ての$A \in \mathcal{F}$に対して$\mathrm{P}[\ A\ ] = \mathrm{P}_\infty[\ A\ ]$となる)．　◇

この確率測度P_∞をネットワーク(G,B)上の単純ランダムウォーク と呼ぶ．

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク（§2.1.1）の場合は $c = 2$ であった．一般に $n \in \mathbb{N}$ に対して $G = \mathbb{Z}^n$（§3.1.1 の意味で「隣の点」どうしを結んだネットワークとして）の場合は $c = 2n$ になることも直ちに分かる．すなわち

$$\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & |x-y| = 1, \\ 0, & |x-y| \neq 1\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークについては §3.2 以降で詳しく扱う．

$G = \mathbb{Z}$ の場合には §2.1.1 で，定理 2.2 によって構成された単純ランダムウォークは（十分大きな）確率空間上の独立確率変数の和の列として書くことができる，ということを見た．(3.5) の c が定数の場合はこのことの拡張が成り立つ．

定理 3.2　原点 O が指定されたネットワーク (G, B) において，G の各点から出ている辺の数 (3.5) が x によらない定数ならば，定理 3.1 で得られた無限長さの path の集合上の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ に対して，k 歩目の位置を表す G 値確率変数 $W_k :\ \Omega \to G$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ に関して以下が成り立つ．

(i) $W_0(w) = 0$, $w \in \Omega$.

(ii) $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して，

$$\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = \begin{cases} c^{-1}, & (x,y) \in B, \\ 0, & (x,y) \notin B. \end{cases}$$

(iii) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と任意の $x, y \in G$ および $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1} \subset G$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x,\ W_{k-1} \in A_{k-1},\ \ldots,\ W_1 \in A_1 \,] \\ &\qquad = \mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,], \end{aligned} \tag{3.9}$$

すなわち，$k+1$ 歩目の位置の分布は $k-1$ 歩目までの動き（条件付け）とは独立で，k 歩目の位置から出発した単純ランダムウォークの 1 歩目の位置の分布に等しい（これをマルコフ性という．§3.3.1 を参照）．　◇

証明 $W_0 = 0$ は，出発点が原点の path の上の測度だから当然．

$\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = c^{-1}$ は

$$\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = \frac{\mathrm{P}_{k+1}[\, W_k = x,\ W_{k+1} = y \,]}{\mathrm{P}_k[\, W_k = x \,]}$$
$$= c^{-1} \frac{\sharp\{w \in \Omega_{k+1} \mid W_k(w) = x,\ W_{k+1} = y\}}{\sharp\{w \in \Omega_k \mid W_k(w) = x\}}$$

において，$(x, y) \in B$ ならば，k 歩目の位置が x で $k+1$ 歩目の位置が y なる $k+1$ 歩の path の $k+1$ 歩目 $x \to y$ を取り除けば k 歩目の位置が x の k 歩の path を得るし，逆も真なので

$$\sharp\{w \in \Omega_{k+1} \mid W_k(w) = x,\ W_{k+1} = y\} = \sharp\{w \in \Omega_k \mid W_k(w) = x\}$$

となることから得る．c の定義から，各 $x \in G$ に対して $(x, y) \in B$ となる y は c 個だから，$(x, y) \notin B$ ならば $\mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = 0$ となる．

(3.9) も同様に，$(x, y) \in B$ ならば，条件付き確率を確率の比で書いたときに，分子が $k+1$ 歩の path の一様分布，分母が k 歩の path の一様分布であることからその比は c^{-1} となる． □

この定理から，(3.5) の c が定数の場合は，G 上の単純ランダムウォークとは，原点を出発して G に値をとり 1 歩ごとに隣の点（B で結ばれた点）に等確率で移る確率連鎖であってマルコフ性を持つものである．

$\mathbb{Z}$ に値をとる単純ランダムウォークの場合は増分 $X_i = W_i - W_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, が独立だったが，一般には G は（可算）集合というだけで引き算 $W_i - W_{i-1}$ が定義されている保証はない．定理 3.2 の (3.9)（マルコフ性）は，§1 や §2 で増分の独立性が果たした役割を保ちつつ，引き算への言及を避けた概念である（$\mathbb{Z}^n$ ではベクトルの差によって増分 $X_i = W_i - W_{i-1}$ を定義できるので，§2 の $\mathbb{Z}$ の上の単純ランダムウォークの直接の拡張が可能である）．

(3.5) の $c = c_x$ が点 $x \in G$ によって異なる場合は一般には有限歩数の path 上の一様分布の間に整合条件が成り立たないので，定理 3.1 によって単純ランダムウォークを構成することはできない．しかし定理 3.2 の結論に挙げた三つの条件を満たす確率変数列 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, は（定理 3.2 の中の $c = c_x$ を

点 x によるものと読み替える，すなわち，$\mathrm{P}[\,W_{k+1} = y \mid W_k = x\,] = c_x^{-1}$，$(x,y) \in B$, の意味で）存在する．

定義 3.3　ネットワーク (G, B) 上の原点を出発点とする単純ランダムウォークとは以下を満たすものをいう．

(i) $W_0(w) = 0$, $w \in \Omega$.

(ii) $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して，

$$\mathrm{P}_\infty[\,W_{k+1} = y \mid W_k = x\,] = \begin{cases} c_x^{-1}, & (x,y) \in B, \\ 0, & (x,y) \notin B. \end{cases}$$

ここで c_x は (3.5) の通り $c_x = \sharp\{y \in G \mid (x,y) \in B\}$ である．

(iii) マルコフ性 (3.9) が成り立つ．すなわち，1 歩目から k 歩目まで条件付けたときの $k+1$ 歩目の位置の分布は，$k-1$ 歩目までの動きは関係なく，k 歩目の位置を出発点としたときの 1 歩目の位置の分布に等しい．

$x \in G$ に対して，最初の条件 $W_0 = O$ を $W_0 = x$ にとりかえたものを x を出発点とする単純ランダムウォークという．　◇

各点から延びる辺の数が x によらない場合，すなわち $c = c_x$ が定数のときは，この定義による単純ランダムウォークと定理 3.1 で構成された（存在が保証された）確率連鎖が本質的に同値であることは §2.1 で示した $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークのときと同様なので繰り返さない．両者を区別せずに単純ランダムウォークと呼ぶ．

また，c_x が x によって異なる一般のネットワークにおいて，定義 3.3 の確率連鎖の k 歩目までを見たときの分布は一様分布には対応しないが，何らかの k 歩の path の集合上の確率分布には対応していて，整合条件 (3.7) を満たす．

この節の最後に，あとの予告（定義 3.7 の (3.13)）のために，次の簡単な性質を指摘しておく．

命題 3.4 定義 3.3 の単純ランダムウォークに対して,

$$c_x \mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = c_y \mathrm{P}_\infty[\, W_{k+1} = x \mid W_k = y \,], \quad x, y \in G.$$

◇

証明 $(x, y) \in B$ ならば両辺は 1, $(x, y) \notin B$ ならば両辺は 0 となって, 常に等号が成り立つ. □

3.2 $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークの変位の指数

§3.1.3 で定義したネットワーク上の単純ランダムウォークにおいて, ネットワークとして (§3.1.1 で書いた意味で) n 次元立方格子 $\mathbb{Z}^n$ をとれば, $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークを得る. §3.1.3 で注意したように, (3.5) の $c = c_x$ が $c = 2n$ となって x によらないので, k 歩目までを見たときには (§3.1.2 において $G = \mathbb{Z}^n$ としたもの, すなわち) 原点を出発する $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の path の集合 Ω_k 上の一様分布になっている. 特に $n = 1$ の場合は §2.1 で定義した単純ランダムウォークに一致することは明らかであろう.

$n = 1$ の場合に §1.3 で調べた変位の指数を一般の $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークについて調べよう (§1.3 では有限長さの path の集合上の一様分布しか用意してなかったので P_k で計算したが, 整合条件 (3.7) があるので, 単純ランダムウォーク P_∞ で計算しても同じことである). 結論は, (1.15) が成り立つ, すなわち, 変位の指数は n に無関係に 1/2 である. ここでは命題 1.3 に相当する内容, つまり, ℓ が自然数のときの $\mathrm{E}[\,(W_k^2)^\ell\,]$ を導く.

定理 3.5 $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク $W_k\colon\ \Omega \to \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, について, 任意の自然数 ℓ に対して n と ℓ だけで決まる定数 $C_{n,\ell} > 0$ が存在して,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{E}[\,|W_k|^{2\ell}\,]}{k^\ell} = C_{n,\ell}\,.$$

ここで $w \in \Omega$ に対してベクトル $W_k(w) = (W_{k1}(w), \ldots, W_{kd}(w)) \in \mathbb{Z}^n$ のノルムを与える関数を $|W_k|(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n W_{ki}(w)^2}$ と書いた. ◇

証明　$\ell = 1$ のとき，(3.7) に従って有限歩の期待値 E_k に直す．点 x の隣の $2n$ 個のいずれかの点 y に移る確率が $\mathrm{P}_{k+1}[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = (2n)^{-1}$ であるが，$\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ の中で各 $i = 1, \ldots, n$ に対する i 軸方向の単位ベクトルを e_i とする ($|e_i|^2 = 1$) と，x の隣の点は $x \pm e_i$ と書ける．W_k は $\mathbb{Z}^n$ のいずれかの点にあること，すなわち，

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} \{w \in \Omega \mid W_k(w) = x\} = \Omega$$

という単純な事実に注意すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\, |W_{k+1}|^2 \,] &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |y|^2 \mathrm{P}_{k+1}[\, W_{k+1} = y \,] \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} |y|^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{P}_{k+1}[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] \mathrm{P}_k[\, W_k = x \,] \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{\pm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |x \pm e_i|^2 \mathrm{P}_k[\, W_k = x \,] \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} (|x|^2 + 1) \mathrm{P}_k[\, W_k = x \,] = \mathrm{E}[\, |W_k|^2 \,] + 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

$W_0 = 0$ だから，k についての漸化式を解いて $\mathrm{E}[\, |W_k|^2 \,] = k$ を得る．

$\ell \geqq 2$ のときも同様の計算で漸化式を得る．たとえば $\ell = 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\, |W_{k+1}|^4 \,] &= \frac{1}{2n} \sum_{\pm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} |x \pm e_i|^4 \mathrm{P}_k[\, W_k = x \,] \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \left(|x|^4 + \left(2 + \frac{4}{n}\right) |x|^2 + 1 \right) \mathrm{P}_k[\, W_k = x \,] \\
&= \mathrm{E}[\, |W_k|^4 \,] + \left(2 + \frac{4}{n}\right) \mathrm{E}[\, |W_k|^2 \,] + 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$

($\ell = 1$ のときの計算に比べて新たに加わった変形は $x \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2$$

となることだけである)．$\ell = 1$ のときに得られた $\mathrm{E}[\, |W_k|^2 \,] = k$ を代入して $\mathrm{E}[\, |W_k|^4 \,]$ に関する漸化式を解けば，

$$\mathrm{E}[\, |W_k|^4 \,] = \left(1 + \frac{2}{n}\right) k^2 - \frac{2}{n} k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

を得る．

以下，帰納的に，自然数 ℓ に対しては (1.16) の n 次元版

$$\mathrm{E}[\,|W_k|^{2\ell}\,] \sim C_{n,\ell}k^\ell$$

を得る． □

注 3.6 $n=1$ のときの命題 1.3 に対応する結果だが，証明がずいぶん違うように見えるかもしれない．実際，命題 1.3 では増分の独立性を用い，ここではマルコフ性を用いた．こちらの証明のほうが一般性があるが，$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク W_k の場合は増分 $X_k = W_k - W_{k-1}$ が n 次元ベクトルとして定義できて独立同分布になるので，命題 1.3 と全く同様の証明が可能である．さらに，$n=1$ のときの (1.20) の議論で W_k を $t \cdot W_k$ に，Z を分布 $N(0,t^2/n)$ を持つ確率変数に置き換えることで対応する結果が得られることから，（若干の初等的な議論の後に）一般の $p>0$ に対して

$$\mathrm{E}[\,|W_k|^{2p}\,] \sim C_{n,p}k^p$$

を得る． ◇

変位の指数が空間次元 n によらないというのは，$\mathbb{Z}^n$ という一様な空間の，しかも，単純ランダムウォークという特殊な確率連鎖の，極めて特別な性質であり，一般の確率連鎖では（特に低い次元で）種々の漸近指数が n とともに複雑に変わるのは普通のことであり，また，複雑なネットワークでは単純ランダムウォークでも漸近指数は単純ではない（前者については §5, §6，後者については §7 を参照）．逆に言えば，マルコフ連鎖と空間の一様性に準拠した解析によって一般の確率連鎖の指数の空間依存性を導くことは難しい．第 II 部で紹介するくりこみ群の理論の本来の動機の一つは，マルコフ性にも空間の一様性にも基づかない解析手段によって漸近指数の空間依存性を導く点にある．

3.3 マルコフ性

ネットワーク (G,B) 上の単純ランダムウォークの定義に含まれるマルコフ性 (3.9) という重要な性質を強調するために，既約な時間的に一様な対称なマルコフ連鎖という概念を紹介する．マルコフ性とは，$k+1$ 歩目の位置の分布が $k-1$ 歩目までの動きに関係なく，k 歩目の位置を出発点としたときの次の 1 歩の位置の分布に等しい，という性質を指す．

マルコフ連鎖が解析しやすいもっとも明らかな理由は，ある時刻の位置の分布 $v_k(x)=\mathrm{P}[\,W_k=x\,]$, $x\in G$ だけでそれ以降の確率連鎖の発展が定まる (つまり，各時刻ごとにそのときを出発点と思って，それ以前の経緯を忘れてもかまわない）という点にある．このことから，$v_k(x)$ に対する差分方程式が確率連鎖の時間発展を決める．本書では時空が離散的な場合しか扱わないが，連続時空でもマルコフ性を持つ確率過程を考えることができて，その場合はその時間発展が対応する分布密度の偏微分方程式（拡散方程式）の時間発展で定まる．マルコフ性はこのように強力な解析的手法が可能であることを意味する．フラクタル (§6.1) のように空間が多様体でない場合は，連続極限は偏微分方程式にはならないが，差分の極限として局所的な演算子を得るので，ディリクレ形式などの概念によって扱うことができる．

裏返して言えば，マルコフ性を持たない一般の確率連鎖では時間発展が過去の履歴にも依存するので，時空間に関して局所的な差分方程式や偏微分方程式とは直接には対応しない．第 II 部で紹介するくりこみ群は既存の強力な方法が使えない確率連鎖に対して別の解析手段の可能性を提示する．

3.3.1 既約な時間的に一様な対称なマルコフ連鎖

マルコフ連鎖を定義するために，確率連鎖の出発点の一般化を行う．今まで確率連鎖 W_k は，断らない限り原点を出発点とした $(W_0=O)$ が，この節 §3.3 では出発点を変えた確率連鎖も同時に考え，出発点を $x\in G$ とする確率連鎖を P_x と書く．すなわち，$\mathrm{P}_x[\,W_0=x\,]=1$．ネットワーク上の path の定義は変えない．すなわち，$(x,y)\in B$ であることが $\mathrm{P}_x[\,W_{k+1}=y\mid W_k=x\,]>0$ であることの必要条件であるとする．

細かい注意だが，確率測度の族 P_x, $x \in G$, を一つの可測空間（path の集合 Ω とその部分集合たちからなる σ 加法族 $\mathcal{F}$ の組のこと）の上に定義することは難しくない．すなわち，Ω を任意の点を出発点とする (G, B) 上の無限長 path の集合とし，$\mathcal{F}$ を，任意の点を出発点とする有限長さで決まる path の集合を全て含む最小の σ 加法族とすればよい．特定の確率測度，たとえば，P_O は，出発点を O とする path の集合の上で確率が 1 となり，その補集合の上では 0 となる．

定義 3.7 （今まで通り高々可算個の要素からなる）集合 G と可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対して，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の族 P_x, $x \in G$, と G に値をとる可測関数の列 $W_k: \Omega \to G$, $k \in \mathbb{Z}_+$, の組が既約な時間的に一様な対称なマルコフ連鎖 (Markov chain) であるとは以下の性質を持つことを言う．

既約性 (irreducibility)： 任意の $x, y \in G$ に対して $k \in \mathbb{Z}_+$ がとれて

$$P_x[\, W_k = y \,] > 0, \tag{3.10}$$

時間的一様性 (temporal homogeneity)： $x, y, z \in G$ と $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$P_z[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] = P_x[\, W_1 = y \,], \tag{3.11}$$

マルコフ性 (Markov property)： $x_1, \ldots, x_{k-1}, x, y, z \in G$ と $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\begin{aligned} P_z[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x,\ W_{k-1} = x_{k-1}\,,\ \ldots,\ W_1 = x_1 \,] \\ = P_z[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

対称性 (symmetry)： 各 $x \in G$ ごとに定まる定数 $c_x > 0$ が存在して，$x, y \in G$ に対して

$$c_x P_x[\, W_1 = y \,] = c_y P_y[\, W_1 = x \,]. \tag{3.13}$$

条件付き確率 $P_z[\, A \mid B \,] = \dfrac{P_z[\, A \cap B \,]}{P_z[\, B \,]}$ は，条件 B が確率正で成り立つときのみ定義する．したがって (3.11) と (3.12) は「条件が確率正で成り立つような変数たちの組に対して成り立つ」と読む． ◇

注 3.8　(i) 条件付き確率についても今までと同様に

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] \\ &\qquad = \mathrm{P}_z[\, \{w \in \Omega \mid W_{k+1}(w) = y\} \mid \{w \in \Omega \mid W_k(w) = x\} \,]\end{aligned}$$

などの省略記法を用いる．この記法では事象の共通部分をコンマで区切って並べる．すなわち，

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y',\ W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] \\ &\quad = \mathrm{P}_z[\{w \in \Omega \mid W_{k+2}(w) = y'\} \cap \{w \in \Omega \mid W_{k+1}(w) = y\} \mid \\ &\qquad\qquad \{w \in \Omega \mid W_k(w) = x\}]\end{aligned}$$

などと書く．定義から直ちに分かることだが

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y',\ W_{k+1} = y \mid W_k = x \,] \\ &\quad = \frac{\mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y',\ W_{k+1} = y,\ W_k = x \,]}{\mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = y,\ W_k = x \,]} \times \frac{\mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = y,\ W_k = x \,]}{\mathrm{P}_z[\, W_k = x \,]} \\ &\quad = \mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y' \mid W_{k+1} = y,\ W_k = x \,] \times \mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = y \mid W_k = x \,]\end{aligned}$$

のような性質もマルコフ連鎖では頻繁に用いる．

(ii) もちろん，条件を落とせば形容（動）詞が減ってより一般的な定義を得るが，本書の主たる関心はマルコフ性のない確率連鎖にあるので，マルコフ性についてはもっとも簡単なものに限る．

(iii) (3.12) で右辺が $x_1, \ldots, x_{k-1} \in G$ によらないので，これらについて和をとれば (3.9) も得る．

(iv) (3.13) は他の条件に比べると特殊に見えるかもしれないが，単純ランダムウォークの場合に成り立つ命題 3.4 の拡張という意味で自然な要求である．理論物理学では詳細釣り合いの原理とも呼ばれる．各点から出ている辺の本数の違いを考慮した対称性，と考えれば分かりやすいだろう．単にそのような素朴な意味にとどまらず，定常分布を持つための条件，ディリクレ形式（「エネルギー積分」）を持つための条件，あるいは本書の言葉で言えば，抵抗回路 (§3.4) に翻訳できるための条件である．

(v) 一般には確率連鎖というときは，確率変数の列あるいは path 上の確率測度を指すが，マルコフ連鎖は上で説明した意味，つまり，確率測度の族と確率変数の列の組であって上に挙げた性質を満たすものを指す．平たく言うと，マルコフ連鎖と言うときは，これまで確率連鎖と呼んできたもの（であって，しかるべき性質を持つもの）をあらゆる初期分布に関して集めたものを指す（確率連鎖の初期分布とは W_0 の分布を指す．P_x は初期分布 $\mathrm{P}_x^{-1} \circ W_0$ が 1 点 x に集中した単位分布に対応する確率連鎖であり，一般の初期分布は P_x を x について重ね合わせれば得られる）．

◇

(3.11) と (3.12) から，たとえば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y_2\,,\ W_{k+1} = y_1 \mid W_k = x,\ W_{k-1} = x_{k-1}\,,\ \ldots,\ W_1 = x_1\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_z[\, W_{k+2} = y_2 \mid W_{k+1} = y_1\,, W_k = x,\ W_{k-1} = x_{k-1}\,,\ \ldots,\ W_1 = x_1\,] \\
&\qquad \times \mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = y_1 \mid W_k = x,\ W_{k-1} = x_{k-1}\,,\ \ldots,\ W_1 = x_1\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_{y_1}[\, W_1 = y_2\,] \times \mathrm{P}_x[\, W_1 = y_1\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_x[\, W_2 = y_2 \mid W_1 = y_1\,] \times \mathrm{P}_x[\, W_1 = y_1\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_x[\, W_2 = y_2\,,\ W_1 = y_1\,]
\end{aligned}$$

となる．$k+3$ 歩目以降を含んでいても同様に変形できることは明らかであろう．一般に

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_z[W_{k+m} = y_m\,,\ \ldots,\ W_{k+2} = y_2\,,\ W_{k+1} = y_1 \mid \\
&\qquad\qquad W_1 = x_1\,,\ \ldots,\ W_{k-1} = x_{k-1}\,,\ W_k = x] \\
&\quad = \mathrm{P}_x[\, W_m = y_m\,,\ \ldots,\ W_2 = y_2\,,\ W_1 = y_1\,]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

すなわち，時間的に一様なマルコフ連鎖の $k+1$ 歩目から先の動きは k 歩目の位置を出発点とする動きに（path の分布の意味で）等しい．

単純ランダムウォークのマルコフ連鎖としての側面について，定義からほとんど明らかな性質を確認しておく．

命題 3.9　ネットワーク (G,B) と，可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の可測関数列 $W_k:\Omega\to G,\ k\in\mathbb{Z}_+$，と，各 $x\in G$ ごとに $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 P_x が与えられていて，P_x の下で $W_k,\ k\in\mathbb{Z}_+$，は定義 3.3 で定義された x を出発点とする単純ランダムウォークであるとする．すなわち，

(i) $\mathrm{P}_x[\,W_0=x\,]=1$,

(ii) 全ての $k\in\mathbb{Z}_+$ と $(z,y)\in B$ に対して

$$\mathrm{P}_x[\,W_{k+1}=y\mid W_k=z\,]=c_z^{-1}=\sharp\{y\in G\mid (z,y)\in B\}^{-1}, \tag{3.15}$$

(iii) (3.9) に (3.11) を代入した関係式，すなわち，

$$\mathrm{P}_x[\,W_{k+1}=y\mid W_k=z,\ W_{k-1}\in A_{k-1},\ \ldots,\ W_1\in A_1\,]=\mathrm{P}_z[\,W_1=y\,]. \tag{3.16}$$

このとき $(\{W_k\},\{\mathrm{P}_x\})$ は既約な時間的に一様なマルコフ連鎖である．　◇

証明　§3.1.1 でネットワークを定義したとき，つながっているネットワークのみを考えることにしたこと，および，各点から出るネットワークの各辺に対して 1 歩でその辺に沿って移動する確率を等しく正にとったこと (3.15) から，既約性が出る．時間的一様性とマルコフ性は (3.16) から分かる．　□

命題 3.9 の意味で，マルコフ連鎖は単純ランダムウォークを一般化した概念である．

本書ではあと（たとえば §3.4）との関連で，（つながった）ネットワーク (G,B) 上のランダムウォークを次のように定義しておく．

定義 3.10　ネットワーク上のマルコフ連鎖 $(\{W_k\},\{\mathrm{P}_x\})$ であって，

$$\mathrm{P}_x[\,W_1=y\,]>0 \iff (x,y)\in B,$$

なるものを (G,B) 上のランダムウォークと言う．

また，そのようなマルコフ連鎖の中で初期分布を定めた確率連鎖，たとえば，原点から出発する確率連鎖 $\mathrm{P}_O\circ(W_0,W_1,\ldots)^{-1}$ もランダムウォークと呼ぶ．　◇

命題 3.9 と定義 3.7，定義 3.10 を比べれば，ネットワーク上のランダムウォークとは，ネットワーク上の単純ランダムウォークの条件のうち，1 歩ごとに等確率で隣の点に移るという条件をはずしたものである．

§3.1.3 でも注意したが，一般のネットワークでは G の点の間に加法や減法は定義されていないから，増分 $W_{k+1} - W_k$ を考えることは意味がない．しかし（これも §3.1.3 と同様だが），$G = \mathbb{Z}^n$ のときは n 次元ベクトルの引き算の意味で増分が意味を持つので $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークのマルコフ性は次の書き方ができる．

命題 3.11 $W_k, k \in \mathbb{Z}_+$, を $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク，m を非負整数とするとき，$\tilde{W}_k = W_{m+k} - W_m, k \in \mathbb{Z}_+$, は原点を出発点とする単純ランダムウォークであって，$W_0, \ldots, W_m$ と独立である． ◇

定理 1.1 などと類似の議論の繰り返しになるので証明は省略する．

以上の性質は以下この節 §3 で断りなく使う．

3.3.2 推移確率

確率連鎖 $W_k, k \in \mathbb{Z}_+$, と $k \in \mathbb{Z}_+$ と $x, y \in G$ に対して

$$p_k(x, y) = \mathrm{P}_x[\, W_k = y \,] \tag{3.17}$$

とおいてこれを k 歩の推移確率という．推移確率を用いてマルコフ連鎖の条件を書き直すことができる．

命題 3.12 定義 3.7 で定義した既約な時間的に一様な対称なマルコフ連鎖 $(\{W_k\}, \{\mathrm{P}_x\})$ において，$k \in \mathbb{Z}_+$ と $x \in G$ に対して以下が成り立つ．

(i) $0 \leqq p_k(x, y) \leqq 1$, $y \in G$, かつ，$\displaystyle\sum_{y \in G} p_k(x, y) = 1$.

(ii) $p_0(x, y) = \mathrm{P}_x[\, W_0 = y \,] = \delta_{x,y}$

(iii) $x_1, \ldots, x_k, z \in G$ に対して

$$\mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = x \mid W_k = x_k\,,\ \ldots,\ W_1 = x_1 \,] = p_1(x_k, x). \tag{3.18}$$

(iv) $m, k \in \mathbb{N}$ が $m < k$ を満たすとき，$x_1, \ldots, x_k, z \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_z[W_k = x_k,\ W_{k-1} = x_{k-1},\ \ldots,\ W_m = x_m \mid \\
&\qquad\qquad W_m = x_m,\ W_{m-1} = x_{m-1},\ \ldots, W_1 = x_1] \\
&= p_1(x_m, x_{m+1}) p_1(x_{m+1}, x_{m+2}) \cdots p_1(x_{k-1}, x_k) \\
&= \mathrm{P}_{x_m}[\,W_{k-m} = x_k,\ \ldots,\ W_2 = x_{m+2},\ W_1 = x_{m+2}\,].
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

(v) 任意の $y \in G$ に対して $m \in \mathbb{Z}_+$ がとれて $p_m(x, y) > 0$.

(vi) $c_x p_1(x, y) = c_y p_1(y, x)$, $y \in G$. ◇

証明　いずれも定義 3.7 から明らかだろう．たとえば (3.18) は (3.11) と (3.12) から得られるし，(3.19) は (3.18) を用いて

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_z[W_k = x_k,\ W_{k-1} = x_{k-1},\ \ldots,\ W_{m+1} = x_{m+1} \mid \\
&\qquad\qquad W_m = x_m,\ W_{m-1} = x_{m-1},\ \ldots,\ W_1 = x_1] \\
&= \mathrm{P}_z[\,W_k = x_k \mid W_{k-1} = x_{k-1},\ W_{k-2} = x_{k-2},\ \ldots,\ W_1 = x_1\,] \\
&\quad \times \mathrm{P}_z[W_{k-1} = x_{k-1},\ W_{k-2} = x_{k-2},\ \ldots,\ W_{m+1} = x_{m+1} \mid \\
&\qquad\qquad W_m = x_m,\ \ldots,\ W_1 = x_1] \\
&= \mathrm{P}_z[W_{k-1} = x_{k-1},\ W_{k-2} = x_{k-2},\ \ldots,\ W_{m+1} = x_{m+1} \mid \\
&\qquad\qquad W_m = x_m,\ \ldots,\ W_1 = x_1] \\
&\quad \times p_1(x_{k-1}, x_k)
\end{aligned}
$$

のように変形していけばよい． □

特に $G = \mathbb{Z}^n$ のときは命題 3.12 の諸性質に加えて次の空間的一様性（並進対称性）が成り立つ．

$$
p_k(x, y) = p_k(O, y - x), \quad x, y \in \mathbb{Z}^n,\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.20}
$$

具体的に有限長さの path の一様分布に戻って考えれば明らかであろう．本書では割愛するが，並進対称性があれば特性関数の方法によって詳しい性質

が計算できる．逆に言えば並進対称性のない一般のネットワーク上の確率連鎖では，単純ランダムウォークのようにマルコフ性という著しく強力な解析手段が可能な確率連鎖ですら解析は容易でない．一方第 II 部で紹介するくりこみ群の方法は自己相似性を持つネットワーク（フラクタル）と相性がよいので，マルコフ性を欠く確率連鎖とともに並進対称性のないネットワーク上の確率連鎖の解析におけるくりこみ群の可能性も興味の対象となる (§6, §7).

(3.19) からも分かるように時間的に一様なマルコフ連鎖は，確率連鎖 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に関するあらゆる確率や期待値を 1 歩の推移確率 $\{p_1(x,y) \mid x, y \in G\}$ と初期分布だけを用いて書くことができる．特に，時刻に関する漸化式は重要である．(3.18) から

$$\begin{aligned} p_{k+1}(z,x) &= \mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = x \,] \\ &= \sum_{y \in G} \mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = x,\ W_k = y \,] \\ &= \sum_{y \in G} \mathrm{P}_z[\, W_{k+1} = x \mid W_k = y \,] \mathrm{P}_z[\, W_k = y \,] \end{aligned}$$

となるので

$$p_{k+1}(z,x) = \sum_{y \in G} p_k(z,y)\, p_1(y,x), \quad x, z \in G,\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.21}$$

を得る．

特に $G = \mathbb{Z}^n$ のときの単純ランダムウォークでは，(3.8) から

$$p_1(y,x) = \mathrm{P}_y[\, W_1 = x \,] = \frac{1}{2n} \delta_{|x-y|,1} \tag{3.22}$$

なので

$$p_{k+1}(z,x) = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n; \\ |x-y|=1}} p_k(z,y) \tag{3.23}$$

を得るから，少し変形すると

$$p_{k+1}(z,x) - p_k(z,x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (p_k(z, x+e_i) - 2p_k(z,x) + p_k(z, x-e_i)), \\ x, z \in G,\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.24}$$

となる．ここで e_i は $\mathbb{Z}^n$ における i 軸方向の単位ベクトル．左辺は推移確率 $p_k(z,x)$ の時間についての差分であり，また，右辺は 2 階偏差分の和だから，ラプラス演算子 $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ を離散化した形をしている（十分滑らかな 1 変数関数 f に対して成り立つ公式 $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2}(f(x+\epsilon) - 2f(x) + f(x-\epsilon)) = f''(x)$ に注意．差分ラプラス演算子と呼ばれる）．すなわち，(3.24) は拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u$$

の離散近似になっている．こうして，単純ランダムウォークと拡散現象の関係が見える．この観察は正しいが，連続極限に関わることなので本書ではこれ以上踏み込まない．

本書はマルコフ性のない場合が主題なので，推移確率が与えられたときに対応するマルコフ連鎖が存在するかという問題に関して詳しいことには立ち入らないが，非負実数の組

$$\{p_k(x,y)\} = \{p_k(x,y) \mid x, y \in G,\ k \in \mathbb{N}\}$$

が

$$\sum_{y \in G} p_k(x,y) = 1, \quad x \in G,\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

および Chapman–Kolmogorov の関係式

$$p_{k+m}(x,y) = \sum_{z \in G} p_k(x,z) p_m(z,y), \quad x, y \in G,\ k, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.25}$$

を満たせば

$$\mathrm{P}_{x_0}[\, W_1 = x_1, \ldots, W_k = x_k \,] = \prod_{i=0}^{k-1} p_1(x_i, x_{i+1}),$$

$$x_i \in G,\ i = 0,1,2,\ldots,k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

とおくことによって $\{p_k(x,y)\}$ を推移確率に持つ時間的に一様なマルコフ連鎖が作れることが知られている．§3.1.3 で定義したネットワーク上の単純ラ

ンダムウォークの推移確率 $\{p_k(x,y)\}$ が (3.25) を満たすことは，これまでの議論から容易に分かるだろう．

単純ランダムウォークを含めてマルコフ連鎖は推移確率さえ与えれば path 上の確率測度は決まってしまうので推移確率は決定的に重要な量である．逆に言えば，マルコフ性のない確率連鎖では決定的に重要な量とは言えなくなるが，ランダムウォークとの対比という意味では引き続き重要な量である．

3.4　電気抵抗回路網とランダムウォーク

3.4.1　到　達　時　刻

定義 3.13　ネットワーク (G,B) 上の確率連鎖 W_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, と $A\subset G$ と $w\in\Omega$ に対して

$$\tau_A(w)=\begin{cases}\min\{k\in\mathbb{N}\mid W_k(w)\in A\}, & \exists k\in\mathbb{N};\ W_k(w)\in A,\\ \infty, & (\forall k\in\mathbb{N})\ W_k(w)\notin A,\end{cases}\tag{3.26}$$

で定義される $\tau_A:\ \Omega\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ を A の到達時刻という．特に A が 1 点からなる集合 $(A=\{x\})$ のとき $\tau_{\{x\}}$ を簡単に τ_x とも書くことにする．　◇

到達時刻は確率連鎖 W_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, が初めて A に達する時刻である．ここでは時刻 0 は除いて定義する $(\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\})$．

一度も A を通らない場合に備えて，必ず $\tau_A=\infty$ となる可能性を考慮しなければいけない（$\{\infty\}$ も値域に含めなければいけない）．たとえば，τ_A を含む関数を $\tau_A=k$ で条件付けて k について和をとる，という変形技術があるが，k についての級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$ を考えただけでは $\tau_A=\infty$ の場合が抜けてしまうことに注意．

到達時刻は Ω 上の関数だが，期待値や確率が計算できるためには可測関数（確率変数）でなければいけない．すなわち $\{\tau_A=k\}\in\mathcal{F}$, $k\in\mathbb{N}$, および $\{\tau_A=\infty\}\in\mathcal{F}$ が必要である．これは実際正しく，しかももう少し強い性質を持つ．

各 $k\in\mathbb{N}$ に対して $W_0,W_1,\dots,W_k$ が生成する σ 加法族を $\mathcal{F}_k=\sigma[W_0,W_1,\dots,W_k]$ とおく．ここで $W_0,W_1,\dots,W_k$ が生成する σ 加法族とは，

$$\{w \in \Omega \mid W_0(w) = a_0,\ W_1(w) = a_1,\ \ldots,\ W_k(w) = a_k\},$$
$$a_0 \in G,\ a_1 \in G,\ \ldots,\ a_k \in G,\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

なる集合たちを全て要素として持つ最小の σ 加法族のことを言う．直感的に言えば，k 歩目までの path の形状だけで決まる（無限長 path の）集合ということが $\mathcal{F}_k$ の要素になっている path 集合ということの意味である．当然 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．

定理 3.14　$A \subset G$ に対して

$$\{\tau_A \leqq k\} = \{w \in \Omega \mid \tau_A(w) \leqq k\} \in \mathcal{F}_k\,,\quad k \in \mathbb{N}.$$

◇

証明　定義から

$$\{\tau_A \leqq k\} = \{1 \leqq \exists \ell \leqq k;\ W_\ell \in A\} = \bigcup_{\ell=1}^{k} \{W_\ell \in A\}$$

となって，右辺は $W_1, \ldots, W_k$ だけで決まるので主張を得る．□

注 3.15　(i) 定理 3.14 の結論は，path が k 歩目までに A の点を通るかどうかは k 歩目までで決まる，と言っているのだから，直感的には当然の結論である．この性質を持つ確率変数を stopping time（止め時）と呼ぶ．$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ だから，確率変数 τ が stopping time になることは

$$\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k,\quad k \in \mathbb{N},$$

と同値である．すなわち，τ が stopping time であるとは，時刻（∞ を許す）に値をとる確率変数であって，τ がある時刻に等しいことがその時刻までの path の形状によって決まることをいう．

(ii) 定理 3.14 と $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$ から τ_A の可測性を得る．残っているのは $\{\tau_A = \infty\} \in \mathcal{F}$ の証明だが，

$$\{w \in \Omega \mid \tau_A(w) = \infty\}^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{w \in \Omega \mid \tau_A(w) = k\}$$

において右辺第 k 項が $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$ に属することと $\mathcal{F}$ が可算和について閉じていることから左辺が $\mathcal{F}$ の要素となり，$\mathcal{F}$ が補集合に閉じていることから $\{\tau_A = \infty\} \in \mathcal{F}$ を得る． ◇

到達時刻 $\tau = \tau_A$ の一つの興味深い使い方は W_τ という確率変数を考えることである．ここで W_τ は

$$W_\tau(w) = W_{\tau(w)}(w), \quad w \in \Omega,$$

で定義される関数 $W_\tau :\ \Omega \to G$ である．ただし，$\tau = \infty$ となる可能性があるので，W_∞ が別途定義されている必要がある．もっとも，W_τ を考える場合は通常 $\mathrm{P}[\,\tau = \infty\,] = 0$ となるので（その場合に有効なので），深刻に考える必要はなく，仮に $h = W_\infty \notin G$ とおくことにして，$W_\tau :\ \Omega \to G \cup \{h\}$ とすればよい．到達時刻の定義は W_τ が確率変数（可測関数）になるようにできている．実際，$x \in G$ に対して τ の値で分類することで

$$\{W_\tau = x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{W_k = x,\ \tau = k\}$$

となる（$h \neq x$ なので $\{W_\tau = x\}$ への $\tau = \infty$ からの寄与はない）が，$\{W_k = x\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$, だから $\mathcal{F}$ が共通部分と可算和について閉じることと合わせて $\{W_\tau = x\} \in \mathcal{F}$ を得る．

$$\{W_\tau = h\} = \left(\bigcup_{x \in G} \{W_\tau = x\} \right)^c \in \mathcal{F}$$

と合わせて，W_τ は確率変数であることが分かる．

W_τ の典型的な使い道は，τ を複数個の点の集合（「領域からの脱出または領域への侵入口」）として，確率連鎖の「脱出（侵入）経路」を W_τ でとらえることである．$A \subset G$ を無限に広がった ($\sharp G = \infty$) ネットワーク (G, B) の中でつながった有限部分集合で，その境界集合 ∂A を $\partial A = \{x \in A \mid \exists y \in G \setminus A;\ (x, y) \in B\}$，すなわち，$A$ の外部とつながっている点の集合とする．さらに $O \in A \setminus \partial A$ とする．O を出発点とする (G, B) 上の単純ランダムウォーク W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に対して，$\sigma = \tau_{\{O\} \cup \partial A}$ を境界点または出発点への到

達時刻，$\tau = \tau_{\partial A}$ を境界点への到達時刻とすると，定義から $\sigma \leqq \tau$ であり，$W_\tau = O$ と $\sigma < \tau$ が同値になる．

まず，$\tau < \infty$, a.e.，すなわち，単純ランダムウォークはいつかは有限部分集合を脱出すること，を証明する．A の各点から出ている (G, B) の辺の個数のうち最大のものを c とおく：$c = \max_{x \in A} \sharp\{y \in G \mid (x, y) \in B\}$．単純ランダムウォークだから，ある点にいたとき次の 1 歩で隣のどれかの点に移る確率は c^{-1} 以上になる．A がつながっているので，A の中のどの点 $x \in A$ にいても ∂A のどの点にも A の中の点を通って達する有限 path があってその歩数は $\sharp A$ 以下だから（∂A に達したら以後外にいる path を考えると）

$$\mathrm{P}_O[\, W_{\sharp A} \in A \setminus \partial A \,] \leqq 1 - c^{-\sharp A}.$$

この評価を m 回繰り返すと，$\mathrm{P}_O[\, \tau > m\sharp A$ または $\tau = \infty \,] \leqq (1 - c^{-\sharp A})^m$．特に，

$$\mathrm{P}_O[\, \tau = \infty \,] = \mathrm{P}_O[\, \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\tau > m\sharp A \text{ または } \tau = \infty\} \,]$$
$$= \lim_{m \to \infty} \mathrm{P}_O[\, \tau > m\sharp A \text{ または } \tau = \infty \,] = 0$$

（なお，このことからさらに $\mathrm{E}[\, \tau \,] < \infty$ も得る．なぜなら，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\, \tau \,] &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}_O[\, \tau = m \,] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(n-1)\sharp A < m \leqq n\sharp A} m\,\mathrm{P}_O[\, \tau = m \,] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} n\sharp A \mathrm{P}_O[\, \tau > (n-1)\sharp A \,] \\
&\leqq \sum_{n=1}^{\infty} n\sharp A (1 - c^{-\sharp A})^{n-1} < \infty,
\end{aligned}$$

となるから）．

さて，$\ell \in \mathbb{N}$ に対して，定理 3.14 から，事象 $\{\sigma = \ell\}$ は ℓ 歩目までで決まるので（つまり，$W_1, \ldots, W_\ell$ の関数なので），(3.14) から，$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_O[\,\tau = k+\ell \mid \sigma = \ell,\ W_\ell = O\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_O[W_j \notin \partial A,\ j = \ell+1, \ell+2, \dots, k+\ell-1, W_{k+\ell} \in \partial A \mid \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad W_\ell = O,\ \sigma = \ell] \\
&\quad = \mathrm{P}_O[\,W_j \notin \partial A,\ j = 1, 2, \dots, k-1, W_k \in \partial A\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_O[\,\tau = k\,].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

これを用いると，$k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_O[\,\tau = \sigma + k,\ W_\sigma = O\,] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{P}_O[\,\sigma = \ell,\ \tau = k+\ell,\ W_\ell = O\,] \\
&\quad = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{P}_O[\,\tau = k+\ell \mid \sigma = \ell,\ W_\ell = O\,] \times \mathrm{P}_O[\,\sigma = \ell,\ W_\ell = O\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_O[\,\tau = k\,] \times \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{P}_O[\,\sigma = \ell,\ W_\ell = O\,] \\
&\quad = \mathrm{P}_O[\,\tau = k\,]\,\mathrm{P}_O[\,W_\sigma = O\,].
\end{aligned}$$

直感的に言うと，$W_\sigma = O$ のとき，時刻 σ に W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, が出発点 O に戻って，以後の動きは新規まき直しで，そこを時刻 0 とするランダムウォークと同じ分布である，ということである．これはマルコフ性と似ているが，時刻 σ が確率変数（sample w によって異なる）ところが違う．この「マルコフ性に似ているが時刻が到達時刻の場合」という性質を強マルコフ性という．確率連鎖では上のようにマルコフ性から強マルコフ性が導ける（時間が連続な確率過程の場合は一般には両者は同値にならない）．

以上から，特に

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_O[\,\tau - \sigma;\ \tau > \sigma\,] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}_O[\,\tau = \sigma + k,\ W_\sigma = O\,] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}_O[\,\tau = k\,]\mathrm{P}_O[\,W_\sigma = O\,] = \mathrm{E}_O[\,\tau\,]\,\mathrm{P}_O[\,W_\sigma = O\,].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

この公式は第 II 部 §7.2 でフラクタル上のランダムウォークを考えるときに用いる．

3.4.2 ネットワーク上のランダムウォークと電気抵抗回路網

電気抵抗回路とランダムウォークの深い関係は [T1, 第 3 章] や [T17] に詳しく紹介されている．ここでは §7.2 で使う内容を簡単に復習しておく．

ネットワーク (G,B) 上のランダムウォーク $(\{W_k\},\{\mathrm{P}_x\})$ を考える（定義 3.10）．1 歩の推移確率 $p_1(x,y)=\mathrm{P}_x[\,W_1=y\,]$, $x,y\in G$, と定義 3.10 の中の対称性 (3.13) に出てくる定数 c_x を用いて

$$c(x,y)=c_x p_1(x,y),\quad x,y\in G, \tag{3.29}$$

とおくと，(3.13) から

$$c(x,y)=c(y,x),\quad x,y\in G,$$

および，確率の保存 $\sum_y p_1(x,y)=1$ から

$$c_x=\sum_{y\in G}c(x,y),\quad x\in G, \tag{3.30}$$

である．

点 $O\in G$ をとり，各 $x,y\in G$ に対してその間を抵抗 $\dfrac{c_O}{c(x,y)}$ で結んだ電気抵抗回路を考える（点 O を一端とする辺 $(O,y)\in B$ については抵抗値を $\dfrac{1}{p_1(O,y)}$ としたことになる）．ただし $p_1(x,y)=0$ のときは抵抗をおかないものとする．すなわち，電気抵抗を線分で置き換えればネットワーク (G,B) を図示したことになる．ここで電気抵抗回路とは，抵抗のネットワークが与えられたときに電流保存則

$$1\text{ 点に流れ込む電流の和}=0 \tag{3.31}$$

とオームの法則

$$\text{抵抗の両端の電位の差}=\text{抵抗を流れる電流}\times\text{抵抗の大きさ} \tag{3.32}$$

で決まる電流と電位が実現する現象を指す．この電気抵抗回路において，点集合 $A\subset G$ に対して O と A の間の有効抵抗を R_{OA} と書く．すなわち，点

$O \in G$ を接地し，A の各点の電位を 1 としたとき O から地面に流れ出る電流の逆数を R_{OA} とおく（この回路全体を一つの抵抗のように思ったとき，外部から見てその抵抗の値が R_{OA} である，という意味で有効抵抗と呼ぶ）．

W_k が 1 歩目以降 A に初めて達する時刻（到達時刻）を

$$\tau_A = \inf\{i \geqq 1 \mid W_i \in A\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

とおく．集合が 1 点からなる場合，たとえば $\{O\}$ のときは，$\tau_{\{O\}}$ を今までと同様に τ_O と書くことにする．

A が O を含まないとき，次の定理は O を出発したランダムウォークが O に戻る前に A に達する確率 $\mathrm{P}_O[\,\tau_A < \tau_O\,]$ が電気抵抗回路の有効抵抗と簡単な関係にあることを示す．

定理 3.16　1 歩の遷移確率 $\{p_1(x,y)\}$ で決まる (G,B) 上の時間的に一様な対称なマルコフ連鎖に対して $c(x,y)$, $(x,y) \in B$, が (3.29) で与えられているものとする．点 $O \in G$ をとり，各 $x, y \in G$ に対してその間を抵抗 $\dfrac{c_O}{c(x,y)}$ で結んだ電気抵抗回路において，点 O と集合 $A \subset G$ の間の有効抵抗 R_{OA} と，A と O の 1 歩目以降の到達時刻 τ_A, τ_O の間に，

$$\mathrm{P}_O[\,\tau_A < \tau_O\,] = R_{OA}^{-1}$$

が成り立つ．◇

注 3.17　左辺は O から出発したランダムウォークが O に戻る前に A に達する確率を表し，脱出確率と呼ばれる（[T1, §3.1.6], [T17, §1.3.4]）．◇

証明　マルコフ性から (3.21) の証明と同様にして（マルコフ性を用いた到達時刻の取り扱いは (3.27) を参考にして），

$$\mathrm{P}_x[\,\tau_A < \tau_O\,] = \sum_{y \in G \setminus (A \cup \{O\})} p_1(x,y)\mathrm{P}_y[\,\tau_A < \tau_O\,] + \sum_{y \in A} p_1(x,y), \quad x \in G. \tag{3.33}$$

そこで

$$V(x) = \begin{cases} \mathrm{P}_x[\,\tau_A < \tau_O\,], & x \notin \{O\} \cup A, \\ 0, & x = O, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

とおくと，$x \notin \{O\} \cup A$ のとき

$$V(x) = \sum_{y \in G} p_1(x,y) V(y)$$

となるが，(3.29) と (3.30) を使うと，これから

$$\begin{aligned} &\sum_{y \in G} \frac{c(x,y)}{c_O}(V(x) - V(y)) = 0, \quad x \notin \{O\} \cup A, \\ &V(x) = 0, \quad x = O, \\ &V(x) = 1, \quad x \in A, \end{aligned} \tag{3.34}$$

となる．これを (3.31), (3.32) と比べると，各 $(x,y) \in B$ に対して xy 間を抵抗 $\dfrac{c_O}{c(x,y)}$ で結んだ電気抵抗回路において，O を接地（電位 0）し A の各点を電位 1 に設定したときに $V(x)$ は点 x における電位を表すことが分かる（(x,y) に置いた抵抗を流れる電流は $\dfrac{c(x,y)}{c_O}(V(x) - V(y))$ である）．

最後に (3.33) で $x = O$ とすると

$$\mathrm{P}_O[\,\tau_A < \tau_O\,] = \sum_{y \in G} \frac{c(O,y)}{c_O} V(y)$$

を得るが，オームの法則 (3.32) から右辺はこの抵抗回路で O に流れ込む電流である．その逆数を O と A の間の有効抵抗 R_{OA} と呼ぶのだったから，$\mathrm{P}_O[\,\tau_A < \tau_O\,] = R_{OA}^{-1}$ となる．　□

注 3.18　(i) 電流保存則 (3.31) とオームの法則 (3.32) は次の最小発熱の原理によって導かれる [T1, §3.1.1]（解の唯一性があるので，電気抵抗回路の各点の電位や各点を流れる電流は，電流保存則とオームの法則によって定義されていると考えても，以下によって定義された量であると考えても同値である）．

考えている電気抵抗回路に対応するディリクレ形式を，$f\colon G \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(f,f) = \frac{1}{2c_O}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G} c(x,y)(f(x)-f(y))^2$$

で定義する．$\mathcal{E}(f,f)$ は，$(x,y)\in B$ の抵抗が $\dfrac{c_O}{c(x,y)}$，（実際の電気回路で実現するとは限らない仮想の）電位分布が f のときの（仮想的な）発熱を与えている．$A, D \subset G$, $A\cap D=\emptyset$, に対して，A と D の間の有効抵抗を

$$R(A,D)^{-1} = \inf\{\mathcal{E}(f,f) \mid f|_A = 0,\ f|_D = 1\} \tag{3.35}$$

で定義すると (3.35) の右辺の最小値をとる電位分布 f がただ一つ存在することが分かる．これがこの回路の（現実に実現する）電位である．証明は [T1, T17] などを参照していただきたい．

(ii) 細かい注意だが，この節の始めで各辺 $(x,y)\in B$ の抵抗を $\dfrac{c_O}{c(x,y)}$ とおいたとき，あたかも特定の点（原点）O を特別視したようにみえるが，実際は電流保存則もオームの法則も線形な法則なので（または，ディリクレ形式が抵抗の線形関数なので），全ての抵抗をいっせいに定数倍すれば電流も電位も比例して変わるだけなので，抵抗の基準として他の点 $O'\in G$ をとって辺 (x,y) に置く抵抗を $\dfrac{c_{O'}}{c(x,y)}$ としても本書の議論は変わらない． ◇

有効抵抗に翻訳することの一つの利点は，合成抵抗の簡単な公式（部分抵抗回路を外から見たとき区別のできない簡単な抵抗回路に置き換えること）を利用できることである．抵抗の直列接続（図 3.2 上図において $R=r_1+r_2$）や並列接続（図 3.2 下図において $R^{-1}=r_1^{-1}+r_2^{-1}$）の合成抵抗はよく知られている（[T1, 問 3.1.10 の解]）が，この他，star–triangle 関係式，あるいは，$Y-\Delta$ 変換と呼ばれる関係式も有効である（図 3.3）．図 3.3 の点 A,B,C の電位とそこに流れ込む電流を未知数として，左右の図で電位と電流をオームの法則を用いて消去することで (R_1,R_2,R_3) を (r_1,r_2,r_3) で表したり，逆に (r_1,r_2,r_3) を (R_1,R_2,R_3) で表したりできる．結果をまとめておくと

$$R_1r_1 = R_2r_2 = R_3r_3 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3} = R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1\,. \tag{3.36}$$

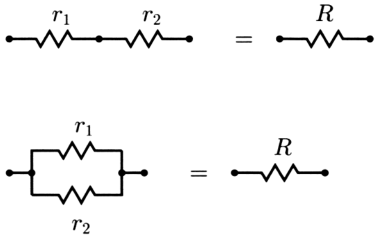


図 3.2

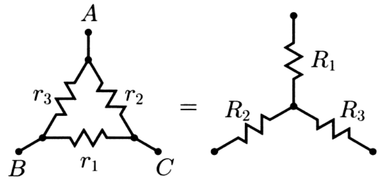


図 3.3

特に，三つの抵抗が等しい ($R_1 = R_2 = R_3 = R$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$) ときは，

$$R = \frac{r}{3} \tag{3.37}$$

を得る．この結果は，第 II 部 §7.2 で，pre-Sierpiński gasket（シルピンスキーガスケット）上の単純ランダムウォークの平均歩数を計算するときに利用する．

ランダムウォークと電気抵抗回路の直接的な関係は，どちらも拡散現象であるという共通の事実が根底にある．非マルコフな確率過程，たとえば §4 で紹介する self-avoiding walk，にはこのような対応はない．

4章

$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path

4.1　Self-avoiding path の本数

4.1.1　Self-avoiding path

これまでの節 (§1, §2, §3) では何の制限もおかない有限歩の path の集合の上の一様分布と，それを無限歩の path の集合上の確率測度に拡張した単純ランダムウォークを考えてきた．ここでは，ある意味で反対の典型例として，自分自身の軌跡が交わることを禁止した self-avoiding path の集合を考える．

Path 上の一様分布にならって，原点を出発点とする $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の self-avoiding path を全て集めた集合を Ω'_k とおき，その上の一様分布を $\tilde{\mathrm{P}}_k$ とおく．詳しく書くと次のようになる．原点を出発点とする $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の path 全ての集合を §3.2 のときと同様に Ω_k とおく．復習しておくと，$\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の path とは §1.1 の $\mathbb{Z}$ 上の path の定義 (1.1) で $w(i)$ を $\mathbb{Z}^n$ にとったもの，すなわち，

$$w(i) \in \mathbb{Z}^n,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k, \quad |w(i) - w(i+1)| = 1,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

を満たす列 $(w(0), w(1), \ldots, w(k))$ のことである．ここで $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ におけるユークリッド距離である．そして，$w \in \Omega'_k$ であるとは，$w \in \Omega_k$ であって，self-avoiding 性

$$w(i) \neq w(j),\ 0 \leqq i < j \leqq k, \tag{4.1}$$

を満たすものを言う．Ω'_k 上の一様分布は（意味は明らかだろうが記号を用意するために書いておくと），k 歩の self-avoiding path の本数を

$$C_k = \sharp\Omega'_k \tag{4.2}$$

とおくとき，

$$\tilde{\mathrm{P}}_k[\ \{w\}\ ] = \frac{1}{C_k}\,, \quad w \in \Omega'_k\,, \tag{4.3}$$

で定義される Ω'_k 上の確率測度である．$\tilde{\mathrm{P}}_k$ に関する期待値を E_k と書くことにする（記号を増やしすぎないために期待値については §1 の制限を加えない path の上の一様分布と同じ記号を使う）．

このような集合と分布を考える応用上の一つの動機は，溶媒に解けている高分子化合物の運動のもっとも簡単なモデルということがある．生物に関連する物質の分子の中には，DNA やタンパク質などを典型例として，大げさに言えば糸状のものがたくさんある．それらが細胞内，あるいは，実験室の溶液内で他の分子にさらされることで熱的平衡状態にあって熱運動している．分子を作る原子は互いに重なることができないので，その運動は分子の形という点では，長さが固定された self-avoiding path の集合の上の何らかの確率分布に従っていることになる．簡単な確率分布を考える，ということは，これらの分子を構成する原子が特別の機能を持たない場合にどのように振る舞うか，を調べることになる．実際には，生物に関連する分子はそれぞれの原子配列から決まる特別な形をとりやすくできている．簡単なモデルに基づく振る舞いとのずれがその分子の真の生物学的な特徴，ということになるので，一様分布などの簡単な確率測度を考えることは，比較の基準を決める意味があるだろう．

本書では具体的な応用例への興味ではなく，マルコフ性を持たない確率連鎖の典型例としての興味に焦点を当てる．Self-avoiding path 上の一様分布の漸近的性質については制限を付けない場合（簡単のために単純ランダムウォークと呼んでおく）と比較すると，極めて弱い性質しか知られていない．しかも分かっていることの大部分は対応する単純ランダムウォークの性質に比べて極めて難しい証明を要する．相対的な困難の理由を一言で言えば，単純ランダムウォークにはマルコフ性があってそれが（§3 でごく一部を紹介したような）強力な解析的手段をもたらす，ということである．詳細に立ち入るまでもなく，マルコフ性がなければ §2 や §3 のように遷移確率だけで確率連鎖（無限長 path 上の確率測度）を決めることができない．長い歩数を経

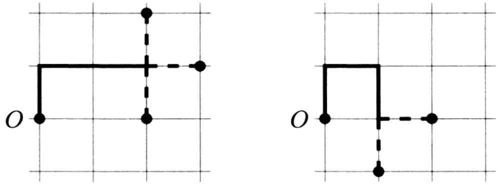


図 4.1

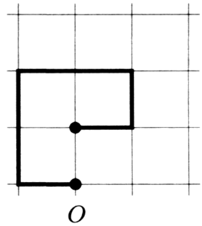


図 4.2

て出発点に戻ってくる path も禁止しないといけないので，直前の位置だけでなく，出発点以降の全ての経路を記憶していないと確率が定まらないからである．Self-avoiding という条件 (4.1) は出発点以降全ての経路を覚えていないといけないという意味で，マルコフ性からもっとも遠い典型例としての興味がある．

Self-avoiding path の上の一様分布 (4.3) は命題 2.1 のような歩数 k に関する整合条件を満たさないので，$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォーク（定理 2.2, 定理 3.1）の場合と対照的に，確率連鎖（無限長 path 上の確率測度）に拡張できない．整合性がないことは，3 歩目まで「コ」の字型に進んだ path は $k = 4$ のところで 2 通りしか行ける可能性がないのに対してそれ以外の path は 3 通りの進み方があることから分かる（図 4.1)．

また，ネットワーク上の単純ランダムウォーク（§3.1.1 の定義 3.3）にならって，一様分布を諦めて Ω'_k 上の確率測度の k に関する列で無限長 path 上の確率測度に拡張しようとしても，単純ランダムウォークと対照的に有限の k で全ての self-aoiding path を確率正にとることはできない．なぜならば，path 自身の過去の履歴が作る袋小路に入った path は self-avoiding 性を保ったまま拡張することができないからである（図 4.2)．

袋小路に入る path を除外して，無限に延びうる path だけに制限すれば無限長の self-avoiding path の集合上の確率測度（self-avoiding な確率連鎖）を構成することは可能である．興味のある読者は，第 II 部で紹介する Sierpiński gasket 上の self-avoiding path の場合について [22] を参照していただきたい．

次節 §4.1.2 以降で $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path について分かっている（単純ランダムウォークに比べれば極めてわずかの）ことの中から基礎的・初等的ないくつかの題材を紹介する．マルコフ性がないためにわずかのことしか分かっていないということから，マルコフ性を用いない方法，たとえば第 II 部で紹介するくりこみ群の方法に目を向ける動機とすることが目的である．$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path についての詳しいことは教科書 [T15] を参照していただきたい．

4.1.2　Self-avoiding path の本数

$n \geqq 1$ を固定して n 次元格子空間 $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path を考える．

Path に制限を加えない場合は path の総数を数えることは何の問題もなかった．§3.1.3 の (3.8) のすぐ上で注意したように 1 歩あたりの可能な path の分岐は $c = 2n$ なので (3.6) と合わせると，原点を出発点とする $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の path の本数は

$$\sharp\Omega_k = c^k = (2n)^k$$

となる．これによって $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の path の集合上の一様分布を直ちにあらわに計算することができた．

Self-avoiding path では，まず path の総数 $C_k = \sharp\Omega'_k$ が難しい問題である．直線上の self-avoiding path $(n = 1)$ の場合は Ω'_k は原点から右または左に等速直線運動する path だけだから何の問題もない．要素の個数は k によらずに $C_k = 2$ である．しかし，$n > 1$ の場合は難問であり，実際，$n = 2, 3, 4$ では，漸近形（歩数 k が大きくなるときの C_k の振る舞い）は未解決である．C_k は self-avoiding path の一様分布 (4.3) の分母なので，これが難しいことが self-avoiding path の性質を調べる上でいきなり障害になる．

全ての次元 n に共通な議論による C_k のもっとも簡単な評価は次で与えられる．1 歩目は $2n$ 方向全てが考えられる．2 歩目以降は直前にいた方向には戻れないので，$2n - 1$ 方向の可能性を越えることはない．よって

$$C_k \leqq 2n(2n-1)^{k-1}.$$

逆に，常に座標軸の正方向にしか進まなければ必ず self-avoiding になる．$\mathbb{Z}^n$ では座標軸は n 方向あるから $C_k \geqq n^k$ を得る．以上を合わせて，

$$n^k \leqq C_k \leqq 2n(2n-1)^{k-1}, \tag{4.4}$$

を得る．このことから C_k が k について指数関数的に増大することが期待されるが，それが正しいことを次節 §4.1.3 で証明する．

4.1.3 劣加法性論法と connective 定数

Self-avoiding path は自分自身と交わらないので，path の通った点を順次結んで得られる線分の集合を path と同一視できる．この意味で self-avoiding path は $\mathbb{Z}^n$ を §3.1.1 の意味でネットワークと見たときの辺の集合 B_n の部分集合になっている（ランダムウォークの場合には同じ辺を何度も通るので path を B_n の部分集合と同一視できない）．ネットワークの部分集合という意味の図形について，図形の大きさ（path の場合は歩数）に関して図形の個数が指数関数的に増大することを証明する基本的な手段として劣加法性の論法がある．

定理 4.1 非負実数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ が

$$a_{n+m} \leqq a_n + a_m\,, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots,$$

を満たせば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n$$

が成り立つ． ◇

注 4.2 極限の存在しない数列は無数にある．この命題の主張の眼目は左辺の極限が存在して有限値である（たとえば a_1 以下であることがすぐ分かる），つまり，左辺が収束する，という点である． ◇

証明 N を自然数とすると任意の自然数 n に対して，$n = Nk + r$ となる $r \in \{1, \ldots, N\}$ と非負整数 k が唯一存在する．仮定から

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} a_n &\leqq \frac{k}{n} a_N + \frac{1}{n} a_r \\ &\leqq \left(1 - \frac{r}{n}\right) \frac{1}{N} a_N + \frac{1}{n} \max\{a_1, \ldots, a_N\} \leqq \frac{1}{N} a_N + \frac{1}{n} \max\{a_1, \ldots, a_N\}\,.\end{aligned}$$

よって，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n \leqq \frac{1}{N} a_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

N は任意だから，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n \leqq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n$$

となる．一方，右辺は定義から $\frac{1}{n} a_n$ 以下だから

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n \leqq \varliminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n .$$

定義から

$$\varliminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n \leqq \varlimsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} a_n$$

なので全て等しくなる．よって主張の左辺の極限が存在して右辺に等しい．

□

劣加法性の議論を用いると k 歩の self-avoiding path の本数 C_k が次の意味で漸近的に指数関数的に振る舞うことが分かる．

命題 4.3 (Hammersley 1957)　$n \in \mathbb{N}$ とする．原点を出発点とする $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の self-avoiding path の集合 Ω'_k の大きさ C_k （すなわち，path の本数）について，極限 $\lim_{k\to\infty} C_k^{1/k}$ が存在する．

より詳しく，

$$\mu_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} C_k^{1/k}$$

とおくとき，$n \leqq \mu_n \leqq 2n-1$ かつ

$$\lim_{k\to\infty} C_k^{1/k} = \mu_n$$

が成り立つ（したがって特に，$C_k \approx \mu_n^k$ である）．　◇

証明　$w \in \Omega'_{k+j}$ は最初の k 歩に限れば Ω'_k に含まれ，あとの j 歩に限った上で出発点が原点に移るように平行移動すれば Ω'_j に含まれるから，

$$C_{k+j} \leqq C_k C_j, \quad k, j \geqq 1,$$

が成り立つ．$C_k \geqq 1$ なので $a_k = \log C_k$ とおけば定理 4.1 を適用できて，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log C_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log C_n$$

となるから，（指数関数の連続性から）$\mu_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} C_k^{1/k}$ とおくとき，

$$\lim_{k\to\infty} C_k^{1/k} = \mu_n$$

を得る．(4.4) より $n \leqq \mu_n \leqq 2n-1$ も分かる． □

μ_n を connective 定数と呼ぶことがある． Path を 1 歩増やすごとにどれくらい path の種類が増えるかを表すので，self-avoiding path にとって $\mathbb{Z}^n$ の各点から「実効的に」何本の辺が延びているかの目安になる指数である（その意味を理解すれば，単純ランダムウォークの対応する指数は $2n$ になることが直ちに分かるだろう）．$n=1$ のとき（直線上の self-avoiding path）は $C_k = 2$, $k \in \mathbb{N}$, だから，自明に $\mu_1 = 1$ である．n が大きいほど path の種類は増える．すなわち，C_k は n について増加するから，μ_n も n について非減少ということも自明である．しかし，$n = 2, 3, 4$ に対しては μ_n の値の詳しいことは分かっていない．数値的には $\mu_2 \fallingdotseq 2.64$, $\mu_3 \fallingdotseq 4.68$ である．$2.58 < \mu_2 < 2.73$ は証明されている（[T12, §6.2] とその文献参照）．もっとも基礎的と見える path の本数の歩数 k に関する漸近的な振る舞いですらこれほど難しい．

空間次元 n の大きいところは少し事情が違う．Kesten が finite memory walk の方法で μ_n の $\dfrac{1}{2n}$ についての漸近展開（すなわち，n が非常に大きい場合の様子）の最初の数項を証明したのち，1960 年代前半までに Hammersley と Kesten が得た結果が 30 年近く厳密な結果としては最善だった．1990 年代前半に Hara–Slade がレース展開の方法によって，n についての漸近展開を決着した．最初の数項を具体的に書くと

$$\mu_n = 2n - 1 - \frac{1}{2n} - \frac{3}{(2n)^2} - \frac{16}{(2n)^3} - \frac{102}{(2n)^4} + O\left(\frac{1}{(2n)^5}\right)$$

である（[20, §6] とその引用文献を参照）．

n が十分大きいとき，$\mu_n \fallingdotseq 2n-1$ となることに注意．これは命題 4.3 の初等的な評価の上限に近いことを意味する．この上限を得た議論をさかのぼる

と (4.4) に至るが，これは，path が 1 歩ごとに直前に来た方向には戻れないが，2 歩以上前の自分自身にぶつかることはないと仮定すると得られる数字である．空間次元が大きくなると，path に特別な制限を加えなくても自分自身の遠い過去の軌跡に遭遇することは「ほとんど」なくなる，言い換えると単純ランダムウォーク自体が高い次元では（直前に来たところに戻る可能性以外は）「ほとんど」self-avoiding 的である，という描像を示唆している．この描像は正しい．しかも，さらに驚くべきことは，空間次元 n が大きくなると単純ランダムウォークが n とともに「なめらか」に漸近的な self-avoiding 性を持つようになるのではない，と考えられていることである．低次元では self-avoiding path 上の一様分布と単純ランダムウォークの歩数に関する漸近的性質（たとえば変位の指数）が異なるが $n > 4$ では（指数の意味で）一致する，と予想されていて，高次元側では以下紹介するようにいくつもの決定的な事実が証明されている．変位の指数については §4.2 以下で紹介する．レース展開の方法は self-avoiding path と単純ランダムウォークが漸近的に（指数の意味で）一致するときに強力な手法であり，n が大きいときに種々の決定的な結果を出している．レース展開については §4.2.3 で紹介する．

命題 4.3 は $\log C_k$ と $\log \mu^k$ の比が 1 に収束することしか言ってないが，Hara–Slade は $n \geqq 5$ ならば C_k と μ^k の比が収束することも証明した．

定理 4.4 (Hara–Slade (1992))　$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding walk について，$n \geqq 5$ ならば

$$A_n = \lim_{k\to\infty} \mu_n^{-k} C_k$$

が存在する．　◇

Hara–Slade の議論はより精密に，補正の減衰度も与えている．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$C_k = A_n \mu^k \left(1 + O(k^{-(\min\{1, \frac{1}{2}(d-4)\})+\epsilon})\right).$$

また次元だけで決まる定数 A_n の n が大きいときの漸近展開も与える：

$$A_n = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{4}{(2n)^2} + O\left(\frac{1}{(2n)^3}\right).$$

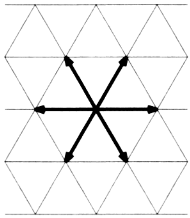


図 4.3

証明は長いので，本書では §4.2.2 で少し説明を加えるにとどめる．興味のある読者は原論文 [18, 19] と教科書 [T15] を参照していただきたい．

ところで，上でも触れたように，$\mathbb{Z}^2$ 上の制限を付けない場合の path の本数は 4^k である．同じ平面内の格子でも三角格子（図 4.3）では 6^k なので格子の形によって異なる．当然 μ も格子の形で異なる．このような系の具体形によって異なる量は一般には詳細な計算が必要なので，正確に決定するのが難しいだろう．他方，変位の指数は，たとえば正方格子でも三角格子でも単純ランダムウォークならば同じ値 1/2 となる．一般に漸近的性質を定める指数は系の詳細によらないと予想されている．物理ではそのような量を普遍的 (universal) と呼ぶことが多い．指数が普遍的であるという予想は第 II 部で紹介するくりこみ群の方法が有効であると信じることと深い関係がある．この点については，第 II 部で path 上の確率測度のくりこみ群を紹介した後に §6.1.4 などで改めて説明する．普遍的な量は，系ごとの個別の計算をしなくても得られる，という期待がくりこみ群の方法への一つの数学的な期待になる．もっとも，C_k や μ_n は出発点になる確率測度を定める量なので，それらが系の詳細によるのにそれに基づいて定義される指数がよらないという期待は簡単ではない．真に満足のいくくりこみ群の数学はまだ存在しない（したがってそれを追求すべきである），と筆者は考える．

4.1.4 帯磁率の指数

§4.1.3 では歩数 k の self-avoiding path の本数 C_k の漸近形について，もっとも主要な振る舞いが指数関数的であることを示した．ただしそこでも注意

したようにその公比 μ_n は格子の形などの系の詳細に依存する，普遍的でない量であった．普遍的と考えられている漸近指数は C_k の指数関数的振る舞いに対する補正としてのべき的振る舞いの部分に現れると考えられている．

$C_k = \mu_n^k r_k$ とおくと，命題 4.3 より $\lim_{k\to\infty} r_k^{1/k} = 1$ は分かるが，一般的には，r_k 自体は収束するとは限らない．たとえば $r_k \fallingdotseq k^{\gamma_n - 1}$ のようにべき的に振る舞うか，という問題が考えられる．スピン系の平衡系統計力学の臨界現象の理論 [T24] における対応する指数の類推から γ_n のことを帯磁率の指数と呼ぶことがある（帯磁率という用語については §4.2.2 も参照）．命題 4.3 から

$$\mu^k \leqq C_k \tag{4.5}$$

を得るので，γ_n は（存在すれば）$\gamma_n \geqq 1$ を満たす．

定理 4.4 によって $n \geqq 5$ ではたしかにこのように振る舞うことと，$\gamma_n = 1$ であることが分かる．一方，単純ランダムウォークでは明らかに $r_k = 1$ だから self-avoiding path の γ_n に相当する量は次元 n によらずに 1 である．すなわち，$n \geqq 5$ では self-avoiding walk の γ_n の値は単純ランダムウォークの対応する値と一致する．

他方，$n \leqq 4$ では self-avoiding walk では（少なくとも $\log r_k$ についての漸近形の意味で）

$$r_k \approx \begin{cases} k^{\gamma_n - 1}, & n = 2, 3, \\ (\log k)^a, & n = 4, \end{cases}$$

と予想されている．ここで $\gamma_2 - 1 = \dfrac{11}{32}$, $\gamma_3 - 1 \fallingdotseq 0.162$, $a = \dfrac{1}{4}$ と予想されている．しかし $n = 2, 3, 4$ では γ_n の存在すら証明はされていない．

4.2　$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数

4.2.1　変 位 の 指 数

§1.3 と §3.2 で $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークの変位の指数について調べて，それが n によらずに 1/2 であることを見た．すなわち，単純ランダムウォーク（言い換えると，path に制限を設けないとき）の k 歩目の平均的な位置は $\sqrt{k}$ 程度である．$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークの場合は，2 次のモーメント

$\mathrm{E}_k[\,W_k^2\,]$（2 乗平均変位）だけでなく，一般のモーメント $\mathrm{E}_k[\,|W_k|^s\,]$ $(s > 0)$ について変位の指数が 1/2 であること (1.15) を示した（命題 1.6）．中心極限定理および重複対数の定理に出てくる指数も 1/2 であること（命題 1.5，定理 2.7）は，単に平均的な位置だけでなく，典型的な path の k 歩目での位置が $k^{1/2}$ の程度だということを意味している．$n = 1$ の場合だけでなく一般の $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークについても変位の指数が 1/2 であることも示した（定理 3.5）．

Self-avoiding path については，問題は飛躍的に難しくなる上に，$n \leqq 4$ では n によって指数の値が異なる，と予想されている．問題の難しさに関して唯一の例外は $n = 1$ の場合で，$\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding path は等速直線運動しかないことから，直ちに (1.17) すなわち $\mathrm{E}_k[\,|W_k|^s\,] \approx k^{s\nu}$, $s > 0$, において変位の指数 $\nu = 1$ が成り立つ．ただし，この値は単純ランダムウォークの 1/2 と違うことに注意（§4.1.3 で触れたように，空間次元が大きいほど単純ランダムウォーク自体が「大局的な self-avoiding 性」を持つ．裏返すと，$n = 1$ の場合が単純ランダムウォークと self-avoiding path の振る舞いがもっとも異なる）．

歩数 k が小さい間はあからさまに数えることで平均的な path の位置を調べることができるが，計算機をもってあからさまに数える方法は急速に計算量が増大する ([T15, Appendix C, §9])．歩数 $k \to \infty$ での漸近的振る舞いについては，誤差の厳密な評価のない近似計算は進んでいるが，厳密な結果については $n = 2, 3, 4$ では未解決である．

$n \geqq 5$ では 2 乗平均変位に関して $\nu_n = 1/2$ が証明されている．

定理 4.5 (Hara–Slade (1992)) $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding walk について，$n \geqq 5$ ならば $\nu = 1/2$ である．

より精密に，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{E}_k[\,|w(k)|^2\,] = D_n k (1 + O(k^{-(\min\{\frac{1}{4}(n-4), 1\}) + \epsilon})).$$

ここで，D_n は次元だけで決まる定数で，たとえば $1.098 \leqq D_5 \leqq 1.803$ を満たす． ◇

2 次以外のモーメントに関しては 2 乗平均変位に比べて技術的に難しい部分があって，今のところやられていないようである．定理 4.5 の証明は定理 4.4 の証明と同様に本書では割愛するが，次節 §4.2.2 で少し説明を加える．

4.2.2　母関数による指数の定義

母関数は漸近形の評価をする上で有効な道具である．ただし，元の変数に戻すとき（タウバー型定理，基礎事項は補遺 §A を参照，実際には込み入った技術を必要とする場合もある）に苦労する場合があって，元の歩数変数に関する漸近形が未解決だが母関数のパラメータに関しては漸近形が決着している，という状況が起きることがある．そこで母関数による漸近指数の定義も紹介しておく．

今まで通り，$\mathbb{Z}^n$ 上の原点を出発する k 歩の self-avoiding path の本数を C_k として

$$\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, \tag{4.6}$$

とおく．C_k の定義から

$$\chi(z) = \sum_{w \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega'_k} z^{L(w)}$$

と書くこともできる．すなわち，原点から出発するあらゆる有限歩数の self-avoiding path を考えたときの，歩数 L の母関数になっている．命題 4.3 から $\chi(z)$ は $|z| < \mu_n^{-1}$ なる複素数 z に対して定義され，$|z| > \mu_n^{-1}$ では級数が発散する．(4.5) から

$$\chi(z) \geqq (1 - \mu_n z)^{-1}, \quad 0 \leqq z < \mu_n^{-1},$$

である．したがって特に

$$\lim_{z \uparrow \mu_n^{-1}} \chi(z) = \infty \tag{4.7}$$

となる．単純ランダムウォークでは対応する量は

$$\chi_{SRW}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2n)^k z^k = (1 - 2nz)^{-1} \tag{4.8}$$

となることは容易に分かる.

統計力学との類推では $\chi(z)$ が帯磁率と呼ばれる量である. §4.1.4 の帯磁率の指数が（十分に精密な意味で）存在するならば (4.7) の発散のしかたは

$$\chi(z) \sim C\,(1-\mu_n z)^{-\gamma_n}, \quad z \uparrow \mu_n^{-1}, \tag{4.9}$$

のように §4.1.4 の帯磁率の指数 γ_n によって決まる.

ここでは簡単な例でこのような対応（タウバー型定理）がありそうだということだけを見ておくことにする. ある $\gamma_n > 0$ と $C > 0$ に対して $C_k = C\mu_n^k k^{\gamma_n - 1}$ だったとする. (4.6) に代入すれば

$$\chi(z) = C\sum_{k=0}^{\infty} k^{\gamma_n-1}(\mu_n z)^k \sim C\left(\log\frac{1}{\mu_n z}\right)^{-\gamma_n}\Gamma(\gamma_n).$$

ここで $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ はガンマ関数で, $s > 0$ ならば有限の値になる. z が μ_n^{-1} に近づくと

$$\log\frac{1}{\mu_n z} = \log\left(1 + \frac{1-\mu_n z}{\mu_n z}\right) \sim \frac{1-\mu_n z}{\mu_n z} \sim 1-\mu_n z$$

となるので, たしかに (4.9) の発散の指数を得る.

2 乗平均変位の指数 ν も母関数における対応する指数がある. 原点を出発する $\mathbb{Z}^n$ 上の k 歩の self-avoiding path の総本数を C_k と書いたが, より精密に, k 歩の self-avoiding path で k 歩目に $x \in \mathbb{Z}^n$ にいるものの総本数を $C_k(x)$ と書く（§1.5 の $N_{k,x}$ に対応する量である）. 式で書けば,

$$C_k(x) = \sharp\{w \in \Omega'_k \mid w(k) = x\} \tag{4.10}$$

である（細かい注意だが $x = O$ というのは出発点に戻ることを意味するのに対して本書で言う self-avoiding path は出発点に戻ることも許さないので, $k \geqq 1$ では $C_k(O) = 0$ である. なお 0 歩の path は $C_0(O) = 1$ かつ $x \neq O$ のときは $C_0(x) = 0$ とおくのが都合がよい）. そして, 到達点 x を固定したときの (4.6) に対応する量として

$$G_z(O,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x) z^k, \quad x \in \mathbb{Z}^n,\ z \in \mathbb{C},$$

を定義する（再び重要ではないが，上に注意したことから $G_z(O,O)=1$ である）．(4.6) と見比べると

$$\chi(z)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} G_z(O,x)$$

であることは容易に分かる．

$G_z(O,x)$ の z についての収束半径も（自明な $x=O$ の場合を除いて）$\chi(z)$ と同様に μ_n^{-1} であることが bridge（座標第 1 成分が出発点と到達点の座標第 1 成分を端点とする閉区間の外に出ないような self-avoiding path）に関する議論によって分かっている（[T15, §3.2] を参照）．すなわち，$G_z(O,x)$ は $x\neq O$ のとき $|z|<\mu_n^{-1}$ で定義され $|z|>\mu_n^{-1}$ で発散する．

G_z を用いて

$$\xi_2(z)=\sqrt{\chi(z)^{-1}\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}|x|^2 G_z(O,x)}$$

を定義する．これが 2 乗平均変位に直接対応する量で，全ての次元 n で $\xi_2(z)\doteqdot(1-\mu_n z)^{-\nu}$ が予想されていて，$n\geqq 5$ では証明されている（ただし，$n\leqq 4$ では n によって ν の値は異なる）．

定理 4.6 (Hara–Slade (1992))　$n\geqq 5$ とする．z が下から μ_n^{-1} に近づくとき以下が成り立つ．

(i) $\chi(z)\sim\dfrac{A_n}{1-z\mu_n}$　（すなわち，母関数の意味で $\gamma=1$）．

(ii) $\xi_2(z)\sim\sqrt{\dfrac{D_n}{1-z\mu_n}}$　（すなわち，母関数の意味で $\nu=1/2$）．

ここで，A_n, D_n は n だけで決まる定数で，それぞれ定理 4.4，定理 4.5 の定数に等しい．◇

歴史的には先に定理 4.6 のような母関数の発散の指数が先に証明され，それからタウバー型定理によって定理 4.4 や定理 4.5 のような k についての漸近形の指数に翻訳されてきた．

定理 4.6 の証明は [18, 19, T15] にゆずるが，証明に用いられたレース展開の方法 [7] を次節 §4.2.3 で紹介する．

4.2.3 レース展開

この節 §4.2.3 は本書の残りの部分と独立な内容なので，とばして先に進んでも第 II 部などを読む上で全く影響はない．

レース展開は (4.10) のような self-avoiding path についての量を，制限を付けない path についての対応する量からの摂動（補正）の形で表す方法で，大きい n ($n \geqq 5$) の $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path が単純ランダムウォークと指数の意味で同じ漸近的性質を持つことを証明するのに強力な手法である．摂動（補正）と言っても，一度通ったところは二度と通らないという self-avoiding 性の条件は非常に強い．くりこみ群の描像と同様に，一度通ったところに戻ってくる時間の大きさ（スケール）に関する分類を行うという深い工夫がある（ただし，path のいる空間 $\mathbb{Z}^n$ のスケールではなく，時間のスケールに関する展開であることと，命題 4.7 とその下の議論で見るように単純ランダムウォークを基準にしていること，および $\mathbb{Z}^n$ の持つ一様性（並進対称性）を強力に用いる点で，第 II 部で紹介するくりこみ群と大きく異なる）．

レース展開は Brydges–Spencer [7] において定義され，同じ論文で $n > 4$ なる $\mathbb{Z}^n$ 上の，一度通った点に戻ることを少し許す weakly self-avoiding path に関してその有効性が示された（この論文でレース展開は上臨界次元以上 ($n > 4$) の場合に有効な展開であるという意識が明示されている）．

その後 Hara–Slade を中心にして詳細に調べられて §4.2.2 と §4.2.1 で紹介した以外にも多くの結果が得られた．高次元の $\mathbb{Z}^n$ 上のパーコレーションなど，self-avoiding path 以外のモデルにも拡張されて成功してきた．レース展開の技術的な話は本書の範囲を超えるので割愛する．興味ある読者は，本書で紹介しきれなかった多くの話題とともに，原典 [7, 18, 19, 38]，教科書 [T15]，および，その後の展開に関してたとえば [6] など，を参照していただきたい．以下この節では [6, §B] にほぼ沿ってレース展開の定義を紹介する．

原点を出発する k 歩の $\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path のうち k 歩目に $x \in \mathbb{Z}^n$ にいるものの総本数 $C_k(x)$ をレース展開によって表す．その際 self-avoiding 性の条件 (4.1) を

$$\prod_{0 \leqq s < t \leqq k} (1 - \delta_{w(s),w(t)}) \tag{4.11}$$

という因子で表す．明らかに，この量は (4.1) を満たす path $w = (w(0), w(1), \ldots, w(k))$ に対しては 1，満たさない path に対しては 0 を与える．あとの都合で時間（歩数）の区間に関して一般化して $0 \leqq a < b \leqq k$ を満たす整数 a, b と $\in \Omega_k$ に対して

$$K[a,b](w) = \prod_{a \leqq s < t \leqq b} (1 - \delta_{w(s),w(t)}) \tag{4.12}$$

とおいておく．(4.11) は $K[0,k](w)$ と書けるので，$C_k(x)$ の定義 (4.10) から

$$C_k(x) = \sum_{w \in \Omega_k;\ w(k)=x} K[0,k](w). \tag{4.13}$$

(4.12) の右辺を，self-avoiding path と単純ランダムウォークが漸近的に似ているときに良い展開になるように展開し直す．このために時刻（歩数）の対の集合 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{G}$ を次のように定義する．

非負整数の区間 $I = [a,b] \subset \mathbb{Z}_+$ $(a \leqq b)$ に対して $s < t$ を満たす $s, t \in I$ の対 $e = \{s,t\}$ を I の edge と呼び，s と t をそれぞれ edge e の端点と呼ぶ．$I = [a,b]$ の edge をいくつか集めた集合を I 上の graph と呼び，$[a,b]$ の graph を全て集めた集合族を $\mathcal{B}[a,b]$ とおく．空集合も graph とする．たとえば $e_2 = \{0,1\}$, $e_1 = \{0,2\}$, $e_0 = \{1,2\}$ と略記するとき

$$\mathcal{B}[0,2] = \{\emptyset, \{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1,e_2\}, \{e_0,e_2\}, \{e_0,e_1\}, \{e_0,e_1,e_2\}\}.$$

この記号を使うと，(4.12) を展開することで

$$K[a,b](w) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{B}[a,b]} \prod_{\{s,t\} \in \Gamma} (-\delta_{w(s),w(t)}) \tag{4.14}$$

を得る（納得しづらい読者は $[a,b] = [0,2]$ の場合に確かめていただきたい）．$\Gamma = \emptyset$ に対しては

$$\prod_{\{s,t\} \in \emptyset} (-\delta_{w(s),w(t)}) = 1$$

と約束する．

次にこの展開をより良い量に展開し直すために，次の概念を用意する．$I = [a,b]$ 上の graph Γ が連結であるとは，a も b もそれぞれ Γ のどれか

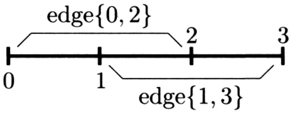


図 4.4

の edge の端点になっていて，かつ，任意の $a < c < b$ を満たす c に対して $s < c < t$ を満たす edge $\{s, t\} \in \Gamma$ がとれるときを言う．$\mathcal{B}[0, 2]$ の graph の中で連結なのは $e_1 = \{0, 2\}$ を含むもの

$$\{e_1\},\ \{e_1, e_2\},\ \{e_0, e_1\},\ \{e_0, e_1, e_2\}$$

の四つである．graph $\{e_0, e_2\}$ は点 1 がどの edge の「内部」にも入らないので連結でない．$\mathcal{B}[0, 2]$ ではこのようにグラフが連結であるためには「全体を覆う」edge e_1 が必要だが，たとえば $\mathcal{B}[0, 3]$ の graph $\{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}$ は $\{0, 3\}$ を含まないけれども連結である（図 4.4）．連結な graph を全て集めた集合族（$\mathcal{B}[a, b]$ の部分集合族になるが）を $\mathcal{G}[a, b]$ とおき，(4.14) の類推で

$$J[a, b](w) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}[a,b]} \prod_{\{s,t\} \in \Gamma} (-\delta_{w(s), w(t)}) \tag{4.15}$$

とおき，最後に，(4.13) の類推で

$$\Pi_k(x) = \sum_{w \in \Omega_k;\ w(k) = x} J[0, k](w) \tag{4.16}$$

を定義する．

命題 4.7 $k \geqq 1$ と $x \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$$C_k(x) = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^n; \\ |x-y|=1}} C_{k-1}(y) + \sum_{m=2}^{k} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \Pi_m(x - z)\, C_{k-m}(z) \tag{4.17}$$

が成り立つ． ◇

証明　各 k 歩の path $w \in \Omega_k$ に対して次式を証明すればよいことに注意する．

$$K[0,k](w) = K[1,k](w|_{1,k}) + \sum_{m=2}^{k} J[0,m](w|_{0,m})K[m,k](w|_{m,k}). \tag{4.18}$$

ここで $w|_{a,b}$ は w の a 歩目の位置から b 歩目の位置までの $b-a$ 歩の path（を出発点が原点になるように平行移動したもの）を表す．実際，この両辺を $w(k) = x$ を満たす $w \in \Omega_k$ に関して加えると，(4.13) と (4.16) から (4.17) を得る（右辺第 1 項は w の最初の 1 歩を取り除いた $k-1$ 歩の path の出発点を原点に移動したものを対応させる）．

(4.18) の証明は，まず，左辺について (4.14) の $\mathcal{B}[0,k]$ に属するグラフに関する和を考えると，0 がどの edge の端点にもなっていないグラフからの寄与が右辺第 1 項になることは容易に分かる．あとは $\mathcal{B}[0,k]$ に属するグラフのうち 0 が edge の端点になっているもののみを考える．そのようなグラフ Γ に対して，$s < c < t$ を満たす edge $\{s,t\}$ が Γ の中にない（$s < c < t$ ならば $\{s,t\} \notin \Gamma$）ような正整数 c のうち最小のものを $m(\Gamma)$ とおく（図 4.5）．k は条件を満たすので $m(\Gamma) \leqq k$ である（つまり $m(\Gamma)$ は必ず存在する）．$m(\Gamma)$ を内部に含む Γ の edge はないので，Γ の edge は $m(\Gamma)$ で二つに分割される．このうち $[0, m(\Gamma)]$ に含まれる edge からなるグラフは定義によって連結である．逆に $0 < m \leqq k$ に対して $[0,m]$ で連結なグラフと $[m,k]$ のグラフを合わせることで 0 を edge の端点に持つ $[0,k]$ のグラフが定まる．この対応は以上の議論から 1 対 1 なので，グラフたちを $m = m(\Gamma)$ で分類することで

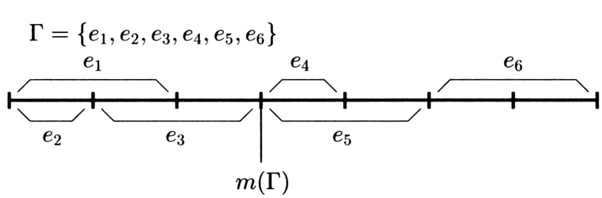


図 4.5

$$K[0,k](w) = K[1,k](w|_{1,k}) + \sum_{m=1}^{k} J[0,m](w|_{0,m})K[m,k](w|_{m,k})$$

を得る．最後に，$[0,1]$ の連結なグラフは $\mathcal{G}[0,1] = \{\{0,1\}\}$ であることに注意すると，(4.15) から

$$J[0,1](w|_{0,1}) = -\delta_{w(0),w(1)}$$

となるが，path が 1 歩で同じ点に戻ることはないので，これは 0 になるから，$m=1$ は和から落とすことができて (4.18) を得る． □

先に進む前に，(4.17) を単純ランダムウォークの場合の差分方程式 (3.23) で出発点を $z = O$ とおいた場合と比べてみる．(3.23) は遷移確率に対する方程式だが，$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークでは遷移確率に k 歩の path の総本数 $(2n)^k$ をかければ特定の点 $x \in \mathbb{Z}^n$ に達する k 歩の path の本数を得るので，それを $C_k^{(0)}(x)$ と書くと

$$C_k^{(0)}(x) = \sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^n;\\ |x-y|=1}} C_{k-1}^{(0)}(y)$$

を得る（左辺と右辺で歩数が 1 違うことに注意．また，(4.17) に合わせて全体の歩数を 1 ずらして書いた）．これを (4.17) と比べれば直ちに分かるように，$\Pi_m(x-z)$ たちが self-avoiding path の単純ランダムウォークに対する摂動（補正）を表している．したがってこれらが何らかの意味で「漸近的に小さい」ことが言えれば self-avoiding path と単純ランダムウォークの漸近的性質（指数）が一致することが言えるだろう．このことを言いやすいように $\Pi_k(x)$ の定義 (4.16) を書き直す．

上記の目的のためにレース (lace) を定義する．連結グラフ $\Gamma \in \mathcal{G}[a,b]$ が区間 $[a,b]$ のレースであるとは，その中のどの edge を取り除いても残りの edges からなるグラフが連結でなくなるときを言う．$[a,b]$ のレースを全て集めた集合族を $\mathcal{L}[a,b]$ と書き，N 個の edge からなる $[a,b]$ のレースを全て集めた集合族を $\mathcal{L}^{(N)}[a,b]$ と書く．連結なグラフ $\Gamma \in \mathcal{G}[a,b]$ が与えられたとき，Γ に対応するレース

$$L_\Gamma = \{\{s_1,t_1\},\{s_2,t_2\},\{s_3,t_3\},\dots\}$$

を，

$$t_1 = \max\{t \mid \{a,t\} \in \Gamma\}, \quad s_1 = a,$$

および，t_i が定まったときに（$i = 1, 2, 3, \ldots$ について帰納的に）

$$t_{i+1} = \max\{t \mid \exists s < t_i;\ \{s,t\} \in \Gamma\}, \quad s_{i+1} = \min\{s \mid \{s, t_{i+1}\} \in \Gamma\},$$

によって定める．i は $t_i = b$ となったところで終わる（Γ が連結という仮定から，そのような i が存在する）．レース $L \in \mathcal{L}[a,b]$ に対して，$\{s,t\} \notin L$ かつ $L_{L\cup\{s,t\}} = L$ なる edge $\{s,t\}$，すなわち「レースの構造に影響しない edge」，の集合を $\mathcal{C}(L)$ とおく．レースを用いて (4.15) を書き直すと，

$$\begin{aligned}
J[a,b](w) &= \sum_{L\in\mathcal{L}[a,b]} \sum_{\substack{\Gamma\in\mathcal{G}[a,b];\\ L_\Gamma = L}} \prod_{\{s,t\}\in\Gamma} (-\delta_{w(s),w(t)}) \\
&= \sum_{L\in\mathcal{L}[a,b]} \prod_{\{s,t\}\in L} (-\delta_{w(s),w(t)}) \times \left(\sum_{\substack{\Gamma\in\mathcal{G}[a,b];\\ L_\Gamma = L}} \prod_{\{s',t'\}\in\Gamma\setminus L} (-\delta_{w(s'),w(t')}) \right) \\
&= \sum_{L\in\mathcal{L}[a,b]} \prod_{\{s,t\}\in L} (-\delta_{w(s),w(t)}) \prod_{\{s',t'\}\in\mathcal{C}(L)} (1 - \delta_{w(s'),w(t')}). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

これをレースの edge の個数で分類して

$$J[a,b](w) = \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N J^{(N)}[a,b](w),$$

$$J^{(N)}[a,b](w) = \sum_{L\in\mathcal{L}^{(N)}[a,b]} \prod_{\{s,t\}\in L} (\delta_{w(s),w(t)}) \prod_{\{s',t'\}\in\mathcal{C}(L)} (1 - \delta_{w(s'),w(t')}), \ N \in \mathbb{N},$$

とおいて (4.16) に代入すると，最終的に

$$\Pi_k(x) = \sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N \Pi_k^{(N)}(x), \qquad (4.20)$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
\Pi_k^{(N)}(x) &= \sum_{w\in\Omega_k;\ w(k)=x} J^{(N)}[0,k](w) \\
&= \sum_{w\in\Omega_k;\ w(k)=x} \sum_{L\in\mathcal{L}^{(N)}[0,k]} \prod_{\{s,t\}\in L} (\delta_{w(s),w(t)}) \prod_{\{s',t'\}\in\mathcal{C}(L)} (1 - \delta_{w(s'),w(t')}). \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

以上の展開は self-avoiding path に関する量 $C_k(x)$（k 歩で x に達する self-avoiding path の本数）を，制限を付けない path 集合 Ω_k 上の和で書いている．(4.21) などの N は $\delta_{w(s),w(t)}$ なる因子の個数だから，path の自己交差の回数を表している．一般的な path では 1 歩前にいた場所に戻ることが抑えられないが，レースではそのような局所的な自己交差をレースの定義で除いているので，N の大きい $\Pi^{(N)}$ は長い歩数ののちに戻ってくる自己交差に相当することになって，空間次元 n が大きいと N の大きい $\Pi^{(N)}$ は小さくなることが期待される．実際，n が大きいときレース展開は n^{-1} に関する展開になっている．[38] はこれを利用して n が十分大きい場合に self-avoiding path の指数が単純ランダムウォークの指数に一致することを証明した．[18, 19] はこれを $n \geqq 5$，すなわち，最終的なところまで改善した（改良点は Tauber 型評価を見通しよくする fractional derivative の導入 [T15, §6.3] と詳細な評価の改善である）．

$\Pi^{(N)}$ が良い量であるという見通しは，$n > 4$ なる $\mathbb{Z}^n$ の上では self-avoiding path は単純ランダムウォークと漸近的性質（指数）が一致するという，もとを正せば，path の「ぎざぎざ」に始まるくりこみ群の深い描像に基づいていることは見過ごしてはいけないだろう．Brydges–Spencer は偶然レース展開に行き当たったのではない．

技術的内容は本書の趣旨からは長すぎるのでこれ以上立ち入らないが，「感じ」だけを見るために (4.21) で $N = 1$ とおいてみる．レースの定義から $L \in \mathcal{L}^{(1)}[0,k]$ とは L が一つの edge からなっていて，$[0,k]$ 全体を覆わなければならないから $L = \{\{0,k\}\}$ ということである．このときどんな edge もレースの構造を変えないから $\{s',t'\} \in \mathcal{C}(L)$ とは $\{s',t'\} \neq \{0,k\}$ と同値である．よって

$$\Pi_k^{(1)}(x) = \sum_{w\in\Omega_k;\ w(k)=x} (\delta_{w(0),w(k)}) \prod_{\substack{0\leqq s'<t'\leqq k;\\ \{s',t'\}\neq\{0,k\}}} (1-\delta_{w(s'),w(t')})$$
$$= \delta_{O,x} \sum_{w\in\Omega_k;\ w(k)=x} \prod_{\substack{0\leqq s<t\leqq k;\\ \{s,t\}\neq\{0,k\}}} (1-\delta_{w(s),w(t)})$$

($\delta_{O,x}$ が一つだけ最初に出ていることが $N=1$ に相当する)．$1-\delta_{w(0),w(t)} \leqq 1$ を用いて最後の積から $s=0$ の寄与を除くと，(4.12) と (4.13) から

$$\Pi_k^{(1)}(x) \leqq \delta_{O,x} \sum_{w\in\Omega_k;\ w(k)=x} K[1,k](w|_{1,k}) = \delta_{O,x} \sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^n;\\ |y|=1}} C_{k-1}(y).$$

ここで，$\delta_{O,x}$ によって $C_{k-1}(x-y)$ を $C_{k-1}(y)$ に書き換えた．このように $\Pi_k^{(N)}(x)$ は $C_k(x)$ たちを用いて評価することができる．他方，(4.17) より $C_k(x)$ たちは $\Pi_k^{(N)}(x)$ で表せるので，結局 $\Pi_k^{(N)}(x)$ に関する非線形の関数不等式を得る．$N \geqq 2$ では $N=1$ のように簡単には評価できないが，詳しく調べるとやはりこのような非線形関数不等式を得る．

§4.2.2 で紹介したように，実際には $\Pi^{(N)}$ や C_k の歩数 k に関する母関数，すなわち，z^k をかけて $k\in\mathbb{Z}_+$ について和をとった量，に対する考察が先に進んだ．母関数を使う方法では z に関する連続性を利用して非線形関数不等式を解いて望ましい評価を得ることができる [T15, §6.2.1].

4.3　自己相似性と指数

この節 §4.3 は，数学的に正当化されていない話のみを扱う．紹介する理由は，空間次元が低いとき（すなわち，単純ランダムウォークと異なるとき）の self-avoiding path の漸近的な振る舞いという数学的に未解決な問題を第 II 部で紹介するくりこみ群の方法で研究する際の心理的な動機になってきたからである．あいまいな議論に混乱を覚える読者はこの節の残りをとばして第 II 部に進んでも論理的には差し支えない．

4.3.1　指数に関する予想

空間次元 n が大きいときの self-avoiding path の指数がレース展開の方法によって急速に解決しつつあるのに比べると，低次元 $(n=2,3,4)$ では指数の存在も含めてほとんど未解決である．

2乗平均変位の指数 ν_n について予想されている値は $\nu_2=3/4, \nu_3=0.59\cdots$, $\nu_4=1/2$ である．$n=3$ の場合は正確な値についての予想はない．$n=4$ のときの指数の予想は単純ランダムウォークの値に一致しているが同時に対数補正

$$\mathrm{E}_k[\,|w(k)|^2\,] \sim D_4 k(\log k)^{1/4}$$

が（ある厳密でない議論によって）予想されていて，単純ランダムウォークとは微妙に違う．

なお，別の議論（系の連続極限が共形不変性を持つと仮定すれば得られる結果）によって $n=2$ の値は正確に 3/4 であろうと予想されている．この議論は（self-avoiding path ではないが）ある特別な系の連続極限（スケーリング極限）が実際に共形不変性を持つことが証明されるなど 21 世紀初頭においても発展があった．本書ではくりこみ群の方法が主目的であること，また，共形不変性は原理的に $n=2$ の場合にしか有効でないこと，からこの議論の紹介は割愛する．興味のある読者は，たとえば [37, 39, 40] やその中の引用文献を参照していただきたい．

このように $n \leqq 4$ の理解の現状が $n \geqq 5$ と大きく違う大きな理由は，n が小さいときは単純ランダムウォークと self-avoiding path では漸近的な性質が定性的にも大きく違う（と予想されている）からである．レース展開の方法は self-avoiding path を単純ランダムウォークからの自明でない摂動として扱う (§4.2.3) ので，摂動が収束する，すなわち，self-avoiding path と単純ランダムウォークの漸近的性質（指数）が一致するときは有効だが，異なると予想されている空間次元の低い場合には今のところ有効でない．

空間次元が低いときに self-avoiding path が単純ランダムウォークと大きく違うと予想されているにもかかわらずなおかつ変位の指数などの指数が存在すると期待されている背景には，統計力学 (§A.3) の臨界現象の理論に由来するスケール不変性という描像がある（序章参照）．スケール不変性にはいろいろな側面があるが，ここの問題に即して簡単に言うと，path の「ぎざぎざ」の度合いに関する典型的な性質は一つの指数 ν だけで決まることを予想する．したがって，path に関する漸近的情報は path の本数とぎざぎざの度合いを定める二つの指数 γ と ν で決まることになる．他の量の漸近的性質（指数）は全てこの二つで（たとえばどの次元 n でも通用する簡単な式で書ける，という意味で）定まると信じられている．統計力学の臨界現象では一般にはこのことは証明されてはいない（スケーリング仮説などと呼ばれる）．

第 II 部 §5 では $\mathbb{Z}$ 上のある具体的な確率連鎖の族について，この描像を数学的に実行できることを示す．スケール不変性とくりこみ群との数学的関連はその具体的な問題について第 II 部 §6.3.2 で明示する．

指数には普遍性の他にもう一つ重要な特徴があると信じられている．次元 n に対する依存性に関することで，self-avoiding path については $n > 4$ で単純ランダムウォークに一致し，$n = 4$ では高々「log 補正」のずれに収まり，$n < 4$ では単純ランダムウォークと異なる，という予想である．この，境目の次元 4 のことを統計力学では（上）臨界次元 (upper critical dimension) と呼ぶ．Self-avoiding path については，この予想は高次元側 ($n \geqq 5$) で定理 4.4 や定理 4.5 のように Hara–Slade の定理によって肯定的に解決している．

臨界次元が存在すると信じる理由は，単純ランダムウォーク（正確にはその連続極限であるブラウン運動）の path の軌跡が直線や曲線のような 1 次元的な広がりではなく，面のような 2 次元的な対象であるという事実にある．より正確には，ブラウン運動の path の軌跡のハウスドルフ次元は 2 である，などの事実が証明されている（ハウスドルフ次元などの概念は，なめらかでない図形にも通用する測度論的な次元の概念である．詳しいことは，[T18] などの教科書を参照していただきたい）．ここでの議論に即して言えば，単純ランダムウォークの典型的な path の軌跡は漸近的に 2 次元的に広がる，ということである．たとえば，単純ランダムウォークの変位の指数は $\mathbb{Z}^n$ では n によらずに 1/2 であったが，もし 1 次元的な軌跡ならば，直線のように歩数と到達点の原点からの距離は比例するから指数は 1 でなければならない．たとえば正方形を埋め尽くすように進むと，距離 x に対して歩数 x^2 になるから指数は 1/2 になる．その意味で一般に軌跡が m 次元的ならば指数は $1/m$ になるから，変位の指数の逆数をもってその path の軌跡の漸近的な次元と呼ぶことが少なくとも直感的には理解できるだろう．

二つの平面は空間次元が 4 未満の空間の中に置こうとするとよほど注意深く置かない限り交わるが，空間次元が 4 を越えればよほど注意深く置かない限り交わらない．典型的な path が長い歩数の後に戻ってきて自分自身に交わるということは，1 歩の歩幅が見えない程度に遠い 2 点から出発した path が（したがって，その軌跡はそれぞれほとんど 2 次元的に見えると考えるが

それが）交わることに相当すると考えると，上の議論から，4 次元より高い次元の空間の中ではほとんど交わらないので，単純ランダムウォークは $n > 4$ では漸近的に self-avoiding であり，したがって，self-avoiding path の漸近的性質を決める指数は単純ランダムウォークのそれに一致する，と期待される．逆に $n < 4$ では両者で指数が異なっているほうが自然である．Path が 2 次元的である，ということは，上で書いた「path がぎざぎざしている」ということの一つの定量的な言い方であるが，このことが指数の値を理解する上で有効であることは，指数を path の「ぎざぎざ」によって理解するのがよい理解であることを示唆する．単純ランダムウォークの path が 2 次元的であるということや，二つの path の交差の確率ということを数学の定理としてきちんと書くことは本書の範囲も目的も超えるので，興味のある読者は教科書 [T12] やその引用文献を参照していただきたい．

きちんとした議論を割愛する代わりにはならないが，次節 §4.3.2 では，self-avoiding path に関して 4 という次元が境目になっていることの（正確とは期待されていないが簡単な）ある議論を紹介する．

4.3.2　フローリーの議論

Self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数 ν_n の古い予想として，化学者 P. J. Flory が 1949 年に与えた議論が知られている．それによると，$\nu = \nu_n$ は（もし存在すれば）次の値に近いと予想される．

$$\nu_F = \begin{cases} \dfrac{3}{n+2}, & n \leqq 4, \\ \dfrac{1}{2}, & n > 4\,. \end{cases} \tag{4.22}$$

フローリーの近似公式は self-avoiding path の変位の指数 ν について §4.3.1 で紹介した予想に近い値を簡単な議論で導いている（§4.2.1 で紹介したことから，$n = 1$ と $n \geqq 5$ では正しい値であることが確立しており，上に書いたように $n = 4$ と $n = 2$ でも正しい数字であると信じられている．$n = 3$ ではおそらく正確な値ではないと信じられているが，ずれは 1 割にも満たない）．また，その議論はなぜ臨界次元が 4 であるかについての「説明」をも与えている．

正しい議論ではない（たとえば，第II部 §6 で紹介する，Sierpiński gasket 上の self-avoiding path については，フローリーの議論を直接拡張して得られる値は正しくないことが分かっている [28]）ことをどう受け止めるかは難しいかもしれないが，数学的に正しい議論が極めて複雑な上に低次元では分かっていることがほとんどない現状では，フローリーの議論も教育的であろうと考えてこの節 §4.3.2 で紹介する．

$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding path の変位の指数に関するフローリーの値 ν_F は次のように定められる．なお，$\fallingdotseq$ は「何らかの意味で近いと考える」程度の意味である．また，C は式ごとに違う値かもしれないが，歩数や path の位置によらない定数，という意味である．

$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークが k 歩目で点 $x \in \mathbb{Z}^n$ にいる確率 $p_k(O,x) = \mathrm{P}_O[\, W_k = x \,]$ は

$$p_k(O,x) \fallingdotseq Ck^{-n/2}\exp(-|x|^2/k) \tag{4.23}$$

である．(4.23) は偶数歩で行けない格子点と奇数歩で行けない格子点があることに注意すれば正しい式に直すことも容易だが，ここでは厳密な議論は省略する．正しい式については教科書，たとえば [T12] を参照していただきたい．(4.23) の直感的議論による説明をあとで補足することにして，ここでは (4.23) から始める．原点を中心とする半径 L の n 次元球面付近の格子点について和をとると，球面の表面積が L^{n-1} に比例するから

$$\overline{p}(k,L) = \mathrm{P}_0[\, |W_k| = L \,] \fallingdotseq CL^{n-1}k^{-n/2}\exp(-L^2/k)$$

（以下の議論を見ると，指数を求めるためには L の正べきがあることは重要だが $n-1$ 乗であること自体は重要ではない）．

Self-avoiding path は単純ランダムウォークに比べて歩数 k が大きいのに到達点 L が小さい path は少ないはずである．なぜなら，制限を付けなければそのような path は自己交差が多いだろうからである．k 個の点を体積 L^n の範囲に一様分布に従って独立にばらまいたとき，一つも重ならない確率を $\exp(-V(k,L))$ とおくと，

$$\exp(-V(k,L)) = \prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)L^{-n}) \sim \exp(-L^{-n}\sum_{j=1}^{k}(j-1))$$
$$\sim \exp(-k^2/(2L^n)).$$

単純ランダムウォークに比べてこの程度減ることになるだろう．よって，k 歩で原点から距離 L 程度離れたところに self-avoiding path がいる確率は $\exp(-V(k,L))\overline{p}(k,L)$ の程度だろう（統計力学では，この対数（の符号を変えたもの）

$$F_k(L) = -\log \overline{p}(k,L) + V(k,L)$$
$$= C - (n-1)\log L + \frac{n}{2}\log k + \frac{L^2}{k} + \frac{k^2}{2L^n} \tag{4.24}$$

を自由エネルギーと呼ぶ）．Self-avoiding path が k 歩で到達する典型的な距離 L の推量値 $L_F(k)$ として，確率が最大（自由エネルギーが最小）となる L をとるのが妥当だろう．$F_k(L)$ は $L\to 0$ と $L\to\infty$ で $+\infty$ に発散するので，最小値は $F_k(L)$ の L に関する微分が 0 になる点で得られるから，

$$-\frac{(n-1)}{L_F(k)} + \frac{2L_F(k)}{k} - \frac{nk^2}{2L_F(k)^{n+1}} = 0\,. \tag{4.25}$$

そのとき変位の指数 ν の推量値 ν_F は ν の定義 (1.17) から，

$$L_F(k) \approx k^{\nu_F}, \quad k \gg 1,$$

によって決めればよいので，代入して整理すると

$$(n-1)k^{1-2\nu_F} + \frac{n}{2}k^{3-(n+2)\nu_F} \approx 2, \quad k \gg 1\,. \tag{4.26}$$

$1 < L < k$ だから $0 \leqq \nu_F \leqq 1$ だが，さらに，右辺が定数 2 なので左辺が $k\to\infty$ で発散してはならない．よって $\nu_F \geqq \max\left\{\frac{3}{n+2}, \frac{1}{2}\right\}$．もし $\nu_F > \max\left\{\frac{3}{n+2}, \frac{1}{2}\right\}$ ならば，$k\to\infty$ で左辺が 0 に近づくので，これも適当でない．よって (4.22) を得る．

$n=4$ が境目の次元になっている理由を確認すると，$n>4$ では (4.26) において $\frac{n}{2}k^{3-(n+2)\nu_F}$ が（$(n-1)k^{1-2\nu_F}$ に比べて）$k\gg 1$ で小さいからだが，

この項は (4.25) の $-\dfrac{nk^2}{2L_F(k)^{n+1}}$ から来たもので，さらにさかのぼると (4.24) の $\dfrac{k^2}{2L^n} = V(k.L)$ から来ている．つまり $n > 4$ では V の項が効かないために $\nu_F = 1/2$ となったのだが，V は単純ランダムウォークと self-avoiding path の違いを評価して得られた項だったから，$n > 4$ では両者に（$k \gg 1$ で）違いがないことを表す．つまり，単純ランダムウォークが長い歩数をかけて自分自身に戻ってくることがないこと（漸近的な self-avoiding 性）が $n = 4$ を境目としている．これは §4.3.1 の path の次元に基づく議論と整合している．

最後に，残っていた単純ランダムウォークに関する (4.23) の指数部の直感的な説明を紹介しておく．

歩数 $k \gg 1$ を固定して x を $L = |x| \gg k^{1/2}$ にとる．すなわち，self-avoiding path を意識して，遠くに押し出されている path を考える．この path は典型的には距離 ℓ_0 程度のスケール以下では普通にぎざぎざする確率が高いだろうから，$\ell \leqq \ell_0$ では歩数の増加 Δk と距離の増加 $\Delta\ell$ は単純ランダムウォークの変位の指数に従って $\Delta k \fallingdotseq \Delta\ell^2$ に従うだろう．他方，大きいスケール ($\ell > \ell_0$) では $L \gg k^{1/2}$ なのでまっすぐ進むだろう．両者を掛け合わせて $k \fallingdotseq \dfrac{L}{\ell_0} \cdot \ell_0^2$ を得るから $\ell_0 \fallingdotseq \dfrac{k}{L}$ と定まる．

$\dfrac{L}{\ell_0}$ 箇所の分岐点でまっすぐ進む選択をしたので，その都度分岐数 c の逆数だけ確率を損しているから，

$$p(k,x) \fallingdotseq c^{-(L/\ell_0)}.$$

これに上で得た ℓ_0 の推定値を代入すると，

$$p(k,x) \fallingdotseq C' \exp(-C|x|^2/k)$$

となって (4.23) の指数部を再現する．

第II部

くりこみ群によるpath空間上の確率測度の解析

くりこみ群とは，対象とする系の上で定義された量の母関数のパラメータの空間上で，元の系を観測する精度（スケール）の変換に対する系の応答を表現した写像が定める離散力学系である．本書では path 上の確率測度（確率連鎖）の族について path の長さを扱う．「くりこみ群」は元々理論物理学の中のスピン系の統計力学と場の量子論の分野で使われた言葉である．(5.11) のように適切なパラメータ空間の上の写像の繰り返し (iteration) として得られる点の動き（軌道）が問題になるので，一般には群にはならず，くりこみ力学系と呼ぶのが言葉の上では適当と思われるが，本書では物理学の伝統に従って「くりこみ・群」ではなく「くりこみ群」5 文字で新しい 1 単語として扱う．

くりこみ群は元の系のマルコフ性の有無に関係なく有効であるが，自己相似性の描像に立脚していることから自然な得意分野がある．本書ではくりこみ群が有効で，かつ，計算のもっとも容易な場合を扱うことで，くりこみ群の考え方を伝えることに重点をおく．

第 II 部では第 I 部で取り上げた単純ランダムウォークと self-avoiding path を題材にしてくりこみ群を説明する．本書の執筆時点では $n=1$ を除く $\mathbb{Z}^n$ 上では self-avoiding path をくりこみ群によって数学的に扱える状況にはない．そこで，まず §5 で $\mathbb{Z}$ 上の path の上の単純ランダムウォークと self-avoiding path を含む広い確率連鎖の族のくりこみ群を扱う．くりこみ群を与えることは，微分方程式や確率微分方程式のように元の系を決める方程式の役割を果たすことが期待されるが，実際にこの節で 1 次元のくりこみ群を任意に与えてそれと整合する確率連鎖を構成する．そして，その確率連鎖の漸近的性質として重複対数の法則の一般化がくりこみ群から得られることを示す．第 II 部の残りの節 §6 と §7 では，少し違う空間（Sierpiński gasket とその高次元一般化）の上で，それぞれ self-avoiding path と非等方的なランダムウォークを扱うことで，くりこみ群の大局的な軌道解析について説明する．

5章

$\mathbb{Z}$ 上の path のくりこみ群

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークについてはくりこみ群の考え方は古くから数学でも知られていた [34] が，これをくりこみ群の視点から一般化して，$\mathbb{Z}$ に値をとる path の集合上の確率測度の大きな族に対してくりこみ群がすなおな作用を持ち，その帰結として重複対数の法則の一般化が成り立つことを示す．

この節 §5 の主な結果は次の定理である．

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$（図 5.1）上の 0 から 1 までの path で，到達点を除いて ± 1 を通らないものの集合を $\tilde{\Omega}_n$ とおく．$n = 1$ の場合の各 path $w \in \tilde{\Omega}_1$ に対して非負実数 $b_1(w)$ が与えられているときに，

$$\Phi_1(z) = \sum_{w \in \tilde{\Omega}_1} b_1(w) z^{L(w)}$$

で Φ_1 を定義し，$\Phi_1(x) = x > 0$ を満たす x を x_c とおく．$L(w)$ は w の歩数である（以下の設定の下で x_c がただ一つ必ず存在することは命題 5.6 より分かる）．$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ とべき級数で書いて係数 c_k たちを定義するときに，このべき級数の収束半径は正で，さらに，$c_2 > 0$ および少なくとも一つの $k \geqq 3$ に対して $c_k > 0$ であることを仮定する．

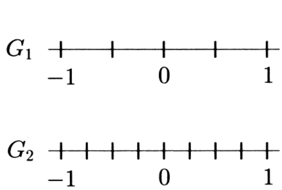


図 5.1

一方, $n \geqq 2$ に対しては後述の (5.10) によって $\{b_1(w)\}$ から帰納的に $b_n(w)$, $w \in \tilde{\Omega}_n$ を定義し,

$$\mathrm{P}_n[\ \{w\}\ ] = b_n(w) {x_c}^{L(w)-1}, \quad w \in \tilde{\Omega}_n\,,$$

で $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度を定義する．本節で次を証明する．

定理 5.1 (定理 5.11，系 5.13，定理 5.17)　各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $w \in \tilde{\Omega}_n$ に対して

$$\mathrm{P}[\ W_j = 2^n w(j),\ j = 0, 1, 2, \ldots, L(w)\ ] = \frac{1}{2} \mathrm{P}_n[\ \{w\}\ ]$$

を満たす $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \ldots$, が存在する．ここで $2^n w$ は，G_n 上の path w を 2^n 倍に拡大して，$\mathbb{Z}$ 上の path にしたものを表す．

さらに，この確率連鎖に対して一般化された重複対数の法則が成り立つ．すなわち，$C_{\pm} > 0$ が存在して

$$C_- \leqq \varlimsup_{k \to \infty} \frac{|W_k|}{k^{\nu} (\log\log k)^{1-\nu}} \leqq C_+\,,\ a.e..$$

ここで，$\lambda = \Phi_1'(x_c)$ を用いて $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおいた．　◇

b_1 はほぼ自由に選べるので，この定理が適用可能な確率連鎖の族は大きい．一方 b_n, $n \geqq 2$, は (5.10) によって b_1 から決まっている．この決め方が「くりこみ群がすなおに作用する確率連鎖の族」ということの内容である．以下この節 §5 でその意味を詳しく説明する．

5.1　Decimation からくりこみ群へ

5.1.1　Path の集合の上の decimation

整数の集合 $\mathbb{Z}$ の上の path の遠方での振る舞いに興味があるが，粗い path に細かい構造を付け加える，とみるために，整数と半奇数 ± 0.5, ± 1.5 を合わせた集合（これを $2^{-1}\mathbb{Z}$ と書く）を考える．以下同様に $n = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して 2^{-n} の整数倍の点を全て集めた集合 $G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$ を考える（図 5.1)．$\mathbb{Z} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ である．単に部分集合というだけでなく，$\mathbb{R}$ の中でみる（$G_n \subset \mathbb{R}$）とき，G_{n+1} は G_n に比べて細かい構造を持つ．逆に G_n は G_{n+1} に比べて「代表的な点だけ残してあとは取り除いた」とみる．

$n \in \mathbb{Z}_+$ を一つ選び，原点 0 を出発する G_n 上の path（有限でも無限でもかまわない）を一つ選んで w とおく．第 I 部と同様に，G_n 上の path とは，1 歩ごとに G_n の隣の点に移る G_n 上の列のこととする．すなわち，$w(0)=0$ および，$L(w)$ を w の長さ（歩数）とするとき

$$|w(i)-w(i+1)| = 2^{-n}, \quad i = 0,1,2,\ldots,L(w),$$

を満たす列 $w=(w(0),w(1),\ldots,w(L(w)))$，あるいは，写像 $w\colon \{0,1,2,\ldots,L(w)\} \to G_n$ を考える．第 I 部と同様に無限長の path のときは $L(w)=\infty$ と書くことにする．

くりこみ群は細かい構造をならしたり付け加えたりする操作を考える（第 I 部 §4.3.1）．本書では decimation という操作を扱う．Decimation とは，細かい構造を持つ path（G_{n+1} 上の path）に粗い path（G_n 上の path）を対応させる規則 Q_n であって，G_{n+1} 上の path w が与えられたときに

(i) w の点列から $G_{n+1}\setminus G_n$ の点を取り除いて G_n の点だけからなる列とし，

(ii) 列の中に一つの点が続けて並んだ場合は最初の一つだけ残してあとを消す，

という操作で得られる点列（G_n 上の path）を $Q_n w$ と定義する（図 5.2）[1]．$Q_n w$ が path であることを言うためには，（止まるまでは）1 歩ごとに G_n の隣の点に移ることを言えばいい．元の w は G_{n+1} 上の path なので 1 歩ごとに G_{n+1} の隣の点に移るから，そこから Q_n の定義の操作の第 1 段階で G_n の点だけとりだした点列を考えると，その列でとなりあう点は同じ点か G_n の隣の点のいずれかである．Q_n の定義の第 2 段階で同じ点が続いた場合は一つだけ残すから，$Q_n w$ は 1 歩ごとに G_n の隣の点に移る．

---

1) 数学と他の科学の接点に関連する教科書で避けられない問題の一つに，用語や記号の意味が食い違って誤解を招く危険がある．Decimation という単語は元来物理学のくりこみ群の理論の中で使われる言葉であるが，本書では物理における曖昧な（言い換えると広がりを持った）意味の **decimation ではなく**，ここで定義した通り，対象を限定して（しかし数学的に厳密な意味で）用いる．他の物理学由来の単語についても全て同様で，本書では断らない限り全て本書で定義した意味で用いる．物理学におけるくりこみ群の理論の背景知識を持って本書を読む場合は注意していただきたい．

以上の注意をして下さった香取眞理先生に感謝したい．

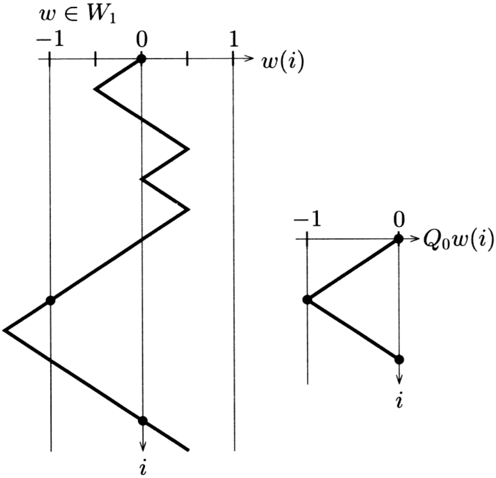


図 5.2

Q_n の定義を式で書くには，まず G_{n+1} 上の path w が G_n を通った時刻の列 $T_{n,i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ を i について帰納的に

$$T_{n,0}(w) = 0,$$
$$T_{n,i}(w) = \min\{j > T_{n,i-1}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i-1}(w))\}\},$$
$$(\text{右辺が存在するとき,}) \qquad (5.1)$$

によって定義する．右辺が存在する i に対してのみ $T_{n,i}$ を定義し，最後の i を $L(Q_n w)$ とおく．その上で，

$$(Q_n w)(i) = w(T_{n,i}(w)),\ i = 0, 1, 2, \ldots, L(Q_n w), \qquad (5.2)$$

とおく．$L(Q_n w)$ は G_n 上の path $Q_n w$ の長さになる．G_{n+1} 上の path w が有限長ならば $Q_n w$ も有限長だが，w が無限長であっても図 5.3 のようにある時刻以降 w が G_n の点を通らない場合には $L(Q_n w)$ が有限になる．定義で念頭にある「右辺が存在しないとき」とはこの場合であり，このとき $Q_n w$ はそこで止まったとみる（ただしこれは重要な点ではない）．

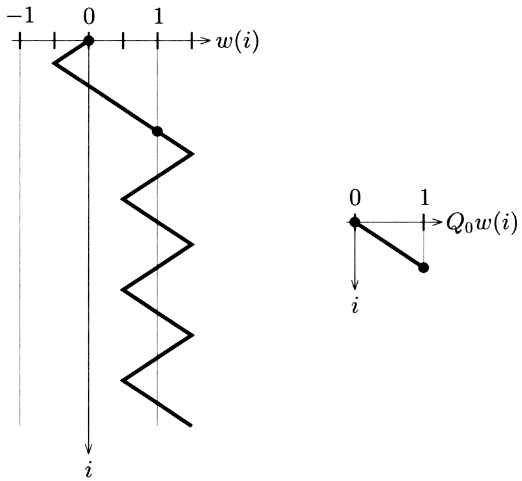


図 5.3

Q_n は少ない歩数の path に写す写像である．長い path の漸近的な性質をみるためには，逆の操作 Q_n^{-1} を考える必要がある．$w \neq w'$ であっても $Q_n(w) = Q_n(w')$ となり得るので，$Q_n^{-1}(w)$ は一意には決まらない．そこで $Q_n^{-1}(w)$ を，Q_n を施すと w になる G_{n+1} 上の path の集合の意味に用いて，どのような path がその中に含まれるかを調べる．

w を 1 歩の歩幅が 1 の path とする．図 5.2 から分かるように，$Q_0^{-1}(w)$ は w の 1 歩 1 歩を歩幅が $\dfrac{1}{2}$ の（言い換えると G_1 上の）有限長の path で置き換えて得られる path たちからなる．w のどの 1 歩についても可能な置き換えの種類は同じだから，0 から 1 への（G_0 上の）1 歩に注目することにして，0 から出発して 1 に当たったら止まる G_1 上の有限長の path のうちで 0 から 1 への G_0 上の 1 歩に対して許される置き換えになっているものからなる集合を $\tilde{\Omega}_1$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 = \{&0 \text{ から出発して } 1 \text{ で止まる } G_1 \text{ 上の有限な長さの path であって，}\\ &\text{最後の 1 歩を除いて } \pm 1 \text{ を通らないもの}\}\end{aligned} \tag{5.3}$$

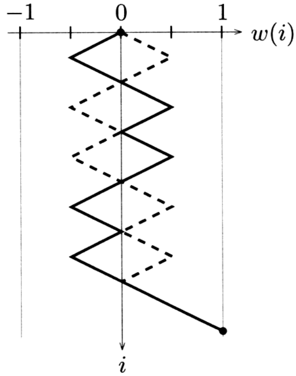


図 5.4

になる．Path を具体的に思い浮かべれば (5.3) が正しいことを見るのはやさしい．Decimation の定義から $\tilde{\Omega}_1$ の path は (5.3) の右辺に書かれた性質を持たねばならないことは一つずつ確かめられるし，逆に (5.3) の右辺に書かれた性質を持つ path に対して decimation を施せば 0 から 1 への 1 歩になることも定義から分かる．

$\tilde{\Omega}_1$ の要素を具体的に書くことができる．実際 (5.3) から

$$\tilde{\Omega}_1 = \left\{ \left(0, \overbrace{\frac{\epsilon_1}{2}, 0, \frac{\epsilon_2}{2}, 0, \ldots, \frac{\epsilon_j}{2}, 0}^{j\text{ 回 }0\text{ に戻る}}, \frac{1}{2}, 1 \right) \,\middle|\, \epsilon_1 = \pm 1, \ldots, \epsilon_j = \pm 1,\ j \in \mathbb{Z}_+ \right\} \tag{5.4}$$

となる（図 5.4）．どの $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対しても Q_m は Q_0 と同様の操作であって，ただし path の歩幅が 2^{-m} 倍である．したがって逆操作（細かい構造を付け加える操作）Q_m^{-1} によって，G_m 上の path の 1 歩は，$\tilde{\Omega}_1$ に含まれる path の歩幅を 2^{-m} 倍にした path に置き換わる．

Path の漸近的性質を調べたいので大きな n に対する G_n 上の path を調べる必要がある．このために n 段階の decimation $Q_0 \circ Q_1 \circ Q_2 \circ \cdots \circ Q_{n-1}$ によって 0 から 1 への G_0 上の 1 歩に置き換わりうる G_n 上の有限な path の集合を，$\tilde{\Omega}_1$ のまねをして，$\tilde{\Omega}_n$ とおく．$\tilde{\Omega}_n$ は，$(Q_0 \circ Q_1 \circ \cdots \circ Q_{n-1})^{-1}$ によっ

て G_0 上の 1 歩が置き換わりうる path の集合と言ってもよい．以上を要約する．

命題 5.2　$(Q_0 \circ Q_1 \circ \cdots \circ Q_{n-1})^{-1}$ によって G_0 上の 0 から 1 への 1 歩の path $(0,1)$ が置き換わりうる path の集合

$$\tilde{\Omega}_n = (Q_0 \circ Q_1 \circ \cdots \circ Q_{n-1})^{-1}((0,1))$$

は 0 から出発して 1 で止まる G_n 上の有限な長さの path であって最後の 1 歩を除いて ± 1 を通らないものの集合に等しい．◇

$w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ とする．その歩数 $L(w)$ と decimation を施した G_n 上の path $Q_n w \in \tilde{\Omega}_n$ の歩数 $L(Q_n w)$ の関係を見ておく．$Q_n w$ の j 歩目の位置は (5.2) から，w の $T_{n,j}(w)$ 歩目の位置に対応する．したがって，特に $L(Q_n w)$ は $T_{n,j}(w) = L(w)$ となる j に等しい．言い換えると，Q_n の逆操作で，$Q_n w$ の j 歩目の 1 歩を w の $T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)$ 歩に細分したことになる．式で書けば

$$L(w) = \sum_{j=1}^{L(Q_n w)} (T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)) \tag{5.5}$$

である．一般に $m \leqq n$ なる任意の非負整数 n, m に対して

$$L(w) = \sum_{j=1}^{L(Q_m \circ Q_{m+1} \circ \cdots \circ Q_n w)} (T_{m,j}(w) - T_{m,j-1}(w)),\ w \in \tilde{\Omega}_{n+1}\,, \tag{5.6}$$

なる分解を考えることができる．

5.1.2　歩数の母関数とくりこみ群

§5.1.1 では path の変換として decimation を定義した．一方，単純ランダムウォークを k 歩目までみると k 歩の path の集合の上の確率測度に対応することを第 I 部 §2 でみた．そこで，確率連鎖の漸近的性質を調べるために decimation が path 上の確率測度のどのような変換を引き起こすかを調べる．最初に調べるべき対象は decimation の際に自然に現れた path の集合，すなわち，命題 5.2 の $\tilde{\Omega}_n$ の上の確率測度である．

$\tilde{\Omega}_n$ に関して n についての再帰式を考える際に自然なのは path の歩数 L の母関数

$$\Phi_n(z) = \sum_{w\in\tilde{\Omega}_n} b_n(w) z^{L(w)} \tag{5.7}$$

である（$n=0$ のとき，$\tilde{\Omega}_0$ は 0 から 1 へ 1 歩で行く path $(0,1)$ だけからなる集合である．重要ではないが，$b_0((0,1)) = 1$，すなわち $\Phi_0(z) = z$ とおけば，以下の議論は $n=0$ でも成り立つので以下そうする）．$b_n(w)$ は path 上の確率測度から定まる非負定数だが，その対応はあと回しにして，まず各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (5.7) の右辺が正の収束半径を持つような非負定数の組 $\{b_n(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ が与えられたとしてそこから話を始める．

$n \in \mathbb{N}$, $w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$，に対して，$w' = Q_n(w) \in \tilde{\Omega}_n$ とおき，$j = 1, 2, \ldots, L(w')$ に対して path w の断片

$$w_j = (w(T_{n,j-1}(w)), w(T_{n,j-1}(w)+1), w(T_{n,j-1}(w)+2), \ldots, w(T_{n,j}(w))) \tag{5.8}$$

を考える．この断片は (5.5) の上で説明したように $w' = Q_n w$ の j 歩目の 1 歩に対応する（図 5.2）から，G_n の点 $a = w(T_{n,j-1}(w))$ から出発して G_n の隣の点 $w(T_{n,j}(w))$ に達する G_{n+1} 上の path で，途中では a 以外の G_n の点を通らない．逆にこの性質を持つ path は全て (5.8) の断片になりうる．(5.3) と比べると，この断片は $\tilde{\Omega}_1$ の要素と相似である．すなわち，その相似対応を一時的に $w_j \mapsto \tilde{w}_j \in \tilde{\Omega}_1$ と書くと，対応

$$w \ \mapsto \ (w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')}) \tag{5.9}$$

は $\tilde{\Omega}_{n+1}$ から

$$\{(w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')}) \mid w' \in \tilde{\Omega}_n,\ \tilde{w}_j \in \tilde{\Omega}_1,\ j = 1, 2, \ldots, L(w')\}$$

への全単射である．

この節 §5 では decimation がもっとも簡単かつ有効な場合に限るべく，非負定数の組 $\{b_n(w)\}$ が次の条件を満たしているものとする．

条件 1：　任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ に対して，(5.9) の対応で決まる $(w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')})$ をとるときに，

$$b_{n+1}(w) = b_n(w') \prod_{j=1}^{L(w')} b_1(\tilde{w}_j) \tag{5.10}$$

が成り立つ．言い換えると，$\{b_1(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_1\}$ だけで（(5.10) を満たすように）決まる $\{b_n(w)\} = \{b_n(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ を考える．　◇

$n = 1$ に対する $\{b_1(w)\}$ に対しては（非負という以外の）条件をいっさいつけず，$n \geqq 2$ に対する $\{b_n(w)\}$ は（簡単のために）$\{b_1(w)\}$ で完全に決める，という条件である．§5.1.3 で見るように $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークは

$$b_n(w) = 1, w \in \tilde{\Omega}_n\,,\ n \in \mathbb{N},$$

に対応するので，(5.10) を満たす例になっている．

次の簡単な事実が全ての出発点である．

命題 5.3 ($\mathbb{Z}$ 上の path のくりこみ群)　(5.7) で定義された Φ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, は (5.10) が成り立つとき，次の漸化式で定まる．

$$\Phi_{n+1}(z) = \Phi_n(\Phi_1(z)),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{5.11}$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{5.12}$$

ここで

$$c_k = \sum_{w \in \tilde{\Omega}_1;\ L(w)=k} b_1(w), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.13}$$

は非負定数で，特に $c_0 = c_1 = 0$ を満たす．　◇

証明　(5.12) は (5.7) から

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{w \in \tilde{\Omega}_1;\ L(w)=k} b_1(w) z^{L(w)}$$

によって直ちに従う．(5.4) から，$w \in \tilde{\Omega}_1$ は G_1 上の点 $0, \dfrac{1}{2}, 1$ を少なくとも 1 回ずつこの順に通るから $L(w) \geqq 2$ となるので，$c_0 = c_1 = 0$ も従う．

(5.11) を証明するために，(5.7) に (5.5) を代入して $w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ についての和を $w' = Q_n w \in \tilde{\Omega}_n$ についての和でまとめなおすと，

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(z) &= \sum_{w \in \tilde{\Omega}_{n+1}} b_{n+1}(w) \prod_{j=1}^{L(Q_n w)} z^{T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)} \\ &= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_n} \sum_{\substack{w \in \tilde{\Omega}_{n+1};\\ Q(w)=w'}} b_{n+1}(w) \prod_{j=1}^{L(w')} z^{T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)}.\end{aligned}$$

w に関する和を (5.9) の対応で $(w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')})$ を用いて書き直すと，(5.8) から $L(\tilde{w}_j) = T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)$ だから，(5.10) と合わせて，

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(z) &= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_n} b_n(w') \sum_{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_1} \sum_{\tilde{w}_2 \in \tilde{\Omega}_1} \cdots \sum_{\tilde{w}_{L(w')} \in \tilde{\Omega}_1} \prod_{j=1}^{L(w')} b_1(\tilde{w}_j) z^{L(\tilde{w}_j)} \\ &= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_n} b_n(w') \left(\sum_{\tilde{w} \in \tilde{\Omega}_1} b_1(\tilde{w}) z^{L(\tilde{w})} \right)^{L(w')} \\ &= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_n} b_n(w') \Phi_1(z)^{L(w')} = \Phi_n(\Phi_1(z)).\end{aligned}$$

□

注 5.4 (i) 命題 5.3 から

$$\Phi_n = \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_1 \tag{5.14}$$

となるので，

$$\Phi_{n+1}(z) = \Phi_1(\Phi_n(z)) \tag{5.15}$$

も同時に成り立つ．もちろん，(5.11), (5.14), (5.15) は同値なので，どれを Φ_n の定義にとってもよい．

(ii) Φ_n は複素平面の収束半径内で定義されるが，定理 5.9 で見るように，Φ_1 の収束半径が正ならば全ての n で収束半径は正である．このとき，命題 5.3 の証明の式で z の各べきの係数を比べることで，(5.11) から (5.10) が導けること（したがって両者は同値であること）が分かる．◇

Path 集合 $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度と $\{b_n(w)\}$ や Φ_n との関係をあと回しにしてあった．$\Phi_1(x)$ の $x>0$ における固定点，すなわち

$$\Phi_1(x_c)=x_c\,,\quad x_c>0, \tag{5.16}$$

を満たす x_c をとる．(5.11) から

$$\Phi_n(x_c)=x_c\,,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{5.17}$$

は直ちに分かる．この x_c を用いて，各 n について，

$$\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,]=b_n(w){x_c}^{L(w)-1},\quad w\in\tilde{\Omega}_n\,, \tag{5.18}$$

で定まる確率測度を考える．これが確率測度を定めることは，$x_c>0$（確率の正値性）と，(5.17) を用いて得られる

$$\mathrm{P}_n[\,\tilde{\Omega}_n\,]=\sum_{w\in\tilde{\Omega}_n}b_n(w){x_c}^{L(w)-1}=\frac{1}{x_c}\Phi_n(x_c)=1\ (\text{全体集合の確率が }1)$$

から分かる．逆に言えば，Φ_1 の正の固定点 x_c に注目するのは，確率測度を考えるために自然なことである（詳しく言うと，固定点に注目するのは，n に無関係に共通の重み (5.18) を考えるためなので，固定点以外のパラメータも考えることができる．このことは §6 や §7 で重要になる．ただし本節では，確率測度 P_n を x_c 以外の x に基づいて定義すると指数 ν が 0 と 1 の間の値になるという興味深い状況が作れないので，固定点以外は重要でない．以下でこの点に立ち入ることはせず，気になる読者には練習問題として残しておく．なお，正のパラメータに限るのは確率測度の正値性から必須である）．

Path 上の確率測度 P_n に関する歩数 L の分布のラプラス変換は (5.18) と (5.7) から

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}e^{-t\,k}\mathrm{P}_n[\,\{w\in\tilde{\Omega}_n\mid L(w)=k\}\,]&=\sum_{w\in\tilde{\Omega}_n}e^{-t\,L(w)}\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,]\\&=\frac{1}{x_c}\sum_{w\in\tilde{\Omega}_n}b_n(w)(e^{-t}x_c)^{L(w)}=\frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-t}x_c)\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる（この式の左辺の縦棒は集合 $\{w \in \tilde{\Omega}_n \mid L(w) = k\}$ を定める縦棒である．条件付き確率を表すのにも $\mathrm{P}[\,\cdot\mid\cdot\,]$ のように縦棒を用いて表すが，この節 §5 では条件付き確率は用いない）．

こうして (5.11) で決まる Φ_n は歩数分布のラプラス変換という意味で path の確率測度 P_n に関係があることが分かる．もう少し詳しく考えると，n を大きくするとき（1 歩を細かくとるので）歩数 L は増えるから，$n \to \infty$ での漸近的性質を見るためには L そのものではなく，L をたとえばその平均値で割った量の分布を考えたほうがよい．あとでみるように，

$$\lambda = \Phi_1'(x_c) = \frac{d\,\Phi_1}{dx}(x_c) \tag{5.20}$$

を用いて，λ^n で割るのが適当である．そこで，P_n の下での $\lambda^{-n}L$ の分布を $\tilde{\mathrm{P}}_n$ とおく：

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \mathrm{P}_n[\,\{w \in \tilde{\Omega}_n \mid L(w) = k\}\,],\quad k \in \mathbb{Z}_+,. \tag{5.21}$$

(5.19) で $t = s\lambda^{-n}$ とおけば，

$$\begin{aligned}\sum_{\xi \in \lambda^{-n}\mathbb{Z}_+} e^{-s\xi}\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\xi\}\,] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} e^{-s\,\lambda^{-n}k}\mathrm{P}_n[\,\{w \in \tilde{\Omega}_n \mid L(w) = k\}\,] \\ &= \frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c)\end{aligned} \tag{5.22}$$

という量を考えるのがよいと推測できる．§5.2 の定理 5.9 で，適当な条件下でこの量が $n \to \infty$ で収束することを示す．こうして，(5.22) の関係を用いて命題 5.3 から歩数分布の漸近的性質を導くことができる．再帰式 (5.15) が定める $\mathbb{R}_+$ 上の力学系を（(5.18) で定まる path 上の確率測度の列の）**くりこみ群**と呼ぶ．

くりこみ群は本書のテーマなので，力学系という視点を少しだけ説明しておく．$x \geqq 0$ に対して，$x_0 = x$, $x_n = \Phi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, とおくと，(5.15) は

$$x_{n+1} = \Phi_1(x_n),\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

を意味する．$\mathbb{R}_+$ 上の点列 $\{x_n\}$ を図示すると，図 5.5 のように初期値 x によってその振る舞いが変わる．一つの初期値に対する点列を軌道と呼び，初

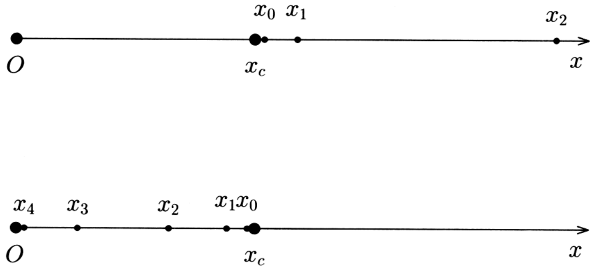


図 5.5

期値 x と軌道の振る舞いの関係を問題にするとき，力学系と言う．軌道，すなわち $x_n = \Phi_n(x)$ の振る舞い，特に Φ_1 の固定点 x_c の近くでの振る舞いがくりこみ群解析の中心であり (§5.2)，対応する確率連鎖の漸近的性質を定める (§5.3)．この節 §5 では Φ_1 は 1 変数関数である．これをくりこみ群が 1 次元力学系であるという．くりこみ群が作用している空間を本書ではパラメータ空間と呼ぶこともあるので，パラメータ空間が 1 次元であるという言い方もする．1 次元くりこみ群は不安定固定点 x_c が一つあるだけという簡単な構造をしている (§5.2.1) ので，力学系ということを意識することはあまりない．くりこみ群が 2 次元以上になると力学系としての軌道の解析が自明でなくなり，くりこみ群解析の新しい数学としての側面が見えてくる．§6 で 2 次元以上のパラメータ空間の例を取り上げる．

注 5.4 によって (5.10) と (5.11) が対応するように (5.15) に対応する $\{b_n(w)\}$ の関係式もある．あと（命題 5.15，補題 C.1）で使うのでここで求めておく．$w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ に対して $w' = Q_1 \circ \cdots \circ Q_n(w) \in \tilde{\Omega}_1$ とおき，$j = 1, 2, \ldots, L(w')$ に対して path w の断片

$$w_j = (w(T_{1,j-1}(w)), w(T_{1,j-1}(w)+1), w(T_{1,j-1}(w)+2), \ldots, w(T_{1,j}(w))) \tag{5.23}$$

を考える．この断片は (5.8) 以下と全く同様の議論によって $w' = Q_1 \circ \cdots \circ Q_n(w)$ の j 歩目の 1 歩に対応し，$\tilde{\Omega}_n$ の要素と相似である．その相似対応を $w_j \mapsto \tilde{w}_j \in \tilde{\Omega}_n$ と書くと，対応

$$w \;\mapsto\; (w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')}) \tag{5.24}$$

は (5.9) と同様の意味で全単射である．また，(5.5) に対応する式から

$$L(\tilde{w}_j) = T_{1,j}(w) - T_{1,j-1}(w) \tag{5.25}$$

を得る．

注 5.4 の (5.11) から (5.10) を得る方法と同様の方法で (5.15) から得られる $\{b_n(w)\}$ の関係式を考えることで次を得る．

系 5.5 (5.10) が成り立つならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ に対して，(5.24) の対応で決まる $(w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')})$ をとるときに，

$$b_{n+1}(w) = b_1(w') \prod_{j=1}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j) \tag{5.26}$$

が成り立つ． ◇

5.1.3 単純ランダムウォークの場合

§5.1.2 で行ったくりこみ群の議論が $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに適用可能であること，すなわち，simple random walk に対応する (5.7) の $\{b_n(w)\}$ が存在して (5.10) を満たすことを確認する．

Φ_n に対応する $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度は (5.18) の P_n であることを見たが，これが単純ランダムウォークに対応するような $\{b_n(w)\}$ を見つけたい．$\tilde{\Omega}_n$ は -1 より先に 1 を hit する G_n 上の path の集合だから，$w \in \tilde{\Omega}_n$ に対して，0 を始点とする G_n 上の単純ランダムウォーク W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, が -1 より先に 1 を hit するという条件の下で $W_j = w(j)$, $j = 1, 2, \ldots, L(w)$, となる確率が (5.18) に等しくなるように $b_n(w)$ を決めればよい．$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークは 1 歩ごとに右または左に確率 $\dfrac{1}{2}$ で移るから，

$$\mathrm{P}[\, W_j = w(j),\ j = 1, 2, \ldots, L(w)\,] = \left(\frac{1}{2}\right)^{L(w)}, \quad w \in \tilde{\Omega}_n,$$

となる．

単純ランダムウォークは右方向と左方向について対称なので，-1 より先に 1 に達する確率は $\dfrac{1}{2}$ である．ここで，± 1 少なくとも一方にいつかは必ず達することを使ったが，これは第 I 部 §3.4.1 の定理 3.14 の下の議論で証明されている．以上から，求める条件付き確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{L(w)-1}$ となるので，

$$\mathrm{P}_n[\,\{w\}\,] = b_n(w){x_c}^{L(w)-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{L(w)-1}, \quad w \in \tilde{\Omega}_n, \tag{5.27}$$

を満たす $b_n(w)$ を求めればよい．

$$b_n(w) = 1,\ w \in \tilde{\Omega}_n\,,\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.28}$$

すなわち，全ての path の重みを等しくとると，(5.27) が成り立つことを示す．(5.28) と (5.4) を (5.7) で $n=1$ としたものに代入すると，

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1-2z^2}\,, \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.29}$$

となる．(5.29) から固定点 (5.16) は

$$x_c = \frac{1}{2} \tag{5.30}$$

となるので，(5.27) が成り立つ．すなわち，(5.28) が単純ランダムウォークに対応する．特に，単純ランダムウォークに対応する母関数は

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\Omega}_n} z^{L(w)}, \tag{5.31}$$

となる．また，(5.28) が (5.10) を満たすことも明らかである．

$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークの decimation は古くから知られていた [34]．そこで用いられた議論は次のようなものである．G_{n+1} 上の単純ランダムウォークの sample path に decimation をおこなうことで得られる G_n 上の確率連鎖は，左右対称性から左右の隣の点への遷移は等確率である．Decimation の結果得られる連鎖の 1 歩が左右どちらにも遷移しないのは図 5.3 のように永久に行ったり来たりを繰り返す場合だけだが，これが起こる確率は 0 である．よって 1 歩について，G_n の左右の隣の点への遷移が 1/2 ずつとなり，

G_{n+1} 上の単純ランダムウォークに decimation をおこなうと G_n 上の単純ランダムウォークになる．

この，[34] の議論は，ランダムウォークの持つマルコフ性を利用した方法であり，一般の確率連鎖には使えない．本書ではマルコフ性を持たない確率連鎖でも共通に使える手法にこだわる．

5.2　くりこみ群の解析

いったん path の確率測度との関係を忘れて，1 次元パラメータ空間上の力学系としてのくりこみ群 (5.11)，あるいは，同値な (5.15) に注目する．

Φ_1 をべき級数

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{5.32}$$

で定義された複素解析関数で以下の条件を満たすとする．

条件 2：

(i) (5.32) の収束半径 r が正，

(ii) $c_0 = c_1 = 0$,

(iii) $c_2 > 0$,

(iv) $c_k \geqq 0$, $k = 3, 4, 5, \ldots$,

(v) 少なくとも一つの $k \geqq 3$ に対して $c_k > 0$．　◇

関数列 Φ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, を (5.15)

$$\Phi_{n+1}(z) = \Phi_1(\Phi_n(z)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

で（右辺が定義されて正則な z に対して）定義する．

これだけの一般的な道具立てだけから，$n \to \infty$ における Φ_n の振る舞いと Φ_n から自然に導かれる確率測度の列の振る舞いについてたくさんのことが分かることを §5.2.1 と §5.2.2 で見る（Path の確率測度といった具体的な問題と無関係に議論できるということは，一般的な無限次元の確率測度の漸近的性質を解析する解析手段となりうるという意味で重要である）．§5.3 でその結果を用いて path の性質に戻る．

5.2.1　くりこみ群の軌道解析

命題 5.6　以下が成り立つ.

(i)

$$\Phi_1(x_c) = x_c, \quad 0 < x_c < r, \tag{5.33}$$

を満たす x_c がただ一つ存在する.

(ii) $\lambda = \Phi_1'(x_c) > 2$.　◇

証明　$\Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = 0$, および

$$\inf_{x \geqq 0} \Phi_1''(x) = \Phi_1''(0) = c_2 > 0,$$

から $\Phi_1'(x) - 1$ は $x \geqq 0$ で狭義増加関数で $x = 0$ で負であり，収束半径の定義と係数の非負性から $x \uparrow r$ で発散する．これから最初の主張を得る．(5.32) の右辺各項は 2 次以上だから

$$\Phi_1'(x) \geqq \frac{2}{x}\Phi_1(x), \quad 0 \leqq x \leqq r.$$

$x = x_c$ とすれば，

$$\lambda = \Phi_1'(x_c) \geqq 2,$$

を得るが，もし $\lambda = 2$ ならば

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-2)c_k x_c^k = x_c\Phi_1'(x_c) - 2x_c = x_c(\lambda - 2) = 0$$

から $c_k \geqq 0$, $k \geqq 3$, となって，仮定に反するので，$\lambda > 2$ を得る．　□

定理 5.7　(i) $n = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して $\Phi_n(x_c) = x_c$ および $\Phi_n'(x_c) = \lambda^n$.

(ii) $0 \leqq x < x_c$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = 0, \tag{5.34}$$

および

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2^{-n} \log \Phi_n(x) < 0. \tag{5.35}$$

◇

注 5.8　(i) (5.34) は x がごくわずかでも x_c より小さければ n とともに Φ_n が x_c から離れて小さくなっていくことを示している．同様に $x > x_c$ ならば $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \infty$ となることも示すことができる．すなわち，x_c は Φ_1 の不安定な固定点である．

(ii) (5.35) は，大ざっぱにいうと $0 \leqq x < x_c$ では $\Phi_n(x)$ は e^{-c2^n} のような速さで 0 に近づくことを意味する．これは x が小さければ $\Phi_1(x)$ は c_2x^2 に近いことから直感的には明らかである．以下の証明は（みかけは多少ややこしいけれども）この直感を証明にしたものである．　◇

証明　最初の主張は (5.33) と (5.15) と帰納法および合成関数の微分法則 (chain rule) から明らか．命題 5.6(i) の証明と同様の単調性の議論によって

$$0 \leqq \Phi_1(x) < x,\quad 0 \leqq x < x_c\,,$$

となるので，帰納法によって $\Phi_n(x)$ は $0 < x < x_c$ の各点で非負かつ n について減少する．よって $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$ が $[0, x_c)$ で存在するが，そこでの Φ_1 の唯一の固定点は 0 だから (5.34) を得る．

最後に (5.35) を証明する．$\Phi_1(x)$ は $x \in [0, r)$ で連続だから，

$$R(x) = \sum_{k=3} c_k x^{k-3} = x^{-3}(\Phi_1(x) - c_2x^2) \tag{5.36}$$

も連続である．特に，$\lim_{x\to 0} R(x) = R(0) = c_3$ となるので，(5.34) と合わせると

$$\lim_{n\to\infty} R(\Phi_n(x)) = c_3\,,\quad 0 \leqq x < x_c\,. \tag{5.37}$$

$x \in [0, x_c)$ を固定する．(5.36) と (5.15) から，

$$\log(c_2\Phi_{n+1}(x)) - 2\log(c_2\Phi_n(x)) = \log\left(1 + \frac{1}{c_2}\Phi_n(x)R(\Phi_n(x))\right),$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

を得るので，m についての帰納法で

$$\log(c_2\Phi_{n+m}(x)) - 2^m \log(c_2\Phi_n(x)) = \sum_{k=1}^{m} 2^{m-k} \log\left(1 + \frac{1}{c_2}\Phi_{n+k-1}(x)R(\Phi_{n+k-1}(x))\right), \quad m = 0,1,2,\ldots,\ n = 1,2,3,\ldots,$$

が成り立つことが分かる．これから

$$\varlimsup_{m\to\infty} 2^{-n-m}\log(c_2\Phi_{n+m}(x)) \leqq 2^{-n}\left(\log(c_2\Phi_n(x)) + \sup_{k\geqq n}\frac{1}{c_2}\Phi_k(x)R(\Phi_k(x))\right), \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

(5.34) と (5.37) から右辺は n が十分大きければ負になることが分かるので，

$$\varlimsup_{m\to\infty} 2^{-m}\log\Phi_m(x) = \varlimsup_{m\to\infty} 2^{-n-m}\log(c_2\Phi_{n+m}(x)) \leqq \inf_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\left(\log(c_2\Phi_n(x)) + \sup_{k\geqq n}\frac{1}{c_2}\Phi_k(x)R(\Phi_k(x))\right) < 0\,.$$

□

$x > 0$ に対して，$x_0 = x$ および $x_n = \Phi_n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$, で数列 x_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, を定義すると，(5.34) から $x < x_c$ ならば x_n は $n\to\infty$ で 0 に収束し，(5.33) から $x = x_c$ ならば x_n はそこにとどまる．$x > x_c$ ならば ∞ に発散することも証明できる（図 5.5）．上に説明したように (5.35) は $x < x_c$ のとき x_n が 0 に収束する詳しい様子を示す．このようにこの節ではパラメータ空間の中での $x_n = \Phi_n(x)$ の動き（くりこみ群の軌道）を調べた．

5.2.2　歩数分布の漸近形

定理 5.9　関数列 $\Phi_n:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $n = 1,2,3,\ldots$, が §5.2 の冒頭の条件 2 を満たしているとする．命題 5.6 で与えられた λ を用いて

$$G_n(s) = \frac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c), \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{5.38}$$

と（右辺が正則であるような s に対して）おく．このとき以下が成り立つ．

(i) G_n は台が非負実数 $\mathbb{R}_+$ 上に含まれるボレル確率測度の母関数である．すなわち，G_n は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義されていて，

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \tilde{\mathrm{P}}_n[\, d\xi\,], \quad \mathbf{Re}(s) \geqq 0,$$

となる $\tilde{\mathrm{P}}_n$ が存在する．$\tilde{\mathrm{P}}_n$ は $n \to \infty$ で，台が非負実数上に含まれるボレル確率測度 $\tilde{\mathrm{P}}_*$ に収束する．

$\tilde{\mathrm{P}}_*$ の母関数

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \tilde{\mathrm{P}}_*[\, d\xi\,]$$

は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ およびある $C_\infty > 0$ に対して $|s| < C_\infty$ で定義されて正則であり，したがって

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{C\xi} \tilde{\mathrm{P}}_*[\, d\xi\,] < \infty$$

を満たす $C > 0$ が存在する．$G^*(s)$ は

$$G^{*\prime}(0) = -1, \quad G^*(s) = G_1(-\lambda \log G^*(s/\lambda)), \tag{5.39}$$

によって定まる．

$|s| < C_\infty$ の中の任意の有界閉集合の上で $G_n(s)$ は $n \to \infty$ のとき $G^*(s)$ に一様収束する．したがって特に，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \tilde{\mathrm{P}}_n[\, d\xi\,] = \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \tilde{\mathrm{P}}_*[\, d\xi\,], \quad p > 0\,.$$

(ii) $C > 0,\ C' > 0$ が存在して，$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n(1-\nu)/\nu}\alpha_n = \infty$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす任意の正項数列 $\{\alpha_n\}$ に対して，

$$\begin{aligned} -C &\leqq \varliminf_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq -C'\,, \end{aligned} \tag{5.40}$$

および，

$$\begin{aligned} -C &\leqq \varliminf_{x\to 0} x^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}_*[\,[0,x]\,] \\ &\leqq \varlimsup_{x\to 0} x^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}_*[\,[0,x]\,] \leqq -C', \quad x > 0\,, \end{aligned} \tag{5.41}$$

が成り立つ．ここで

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} \tag{5.42}$$

とおいた．

さらに，（ξ, n に関係ない）$C > 0$, $C' > 0$, $C'' > 0$ が存在して，$\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \xi \geqq C''$ なる任意の ξ と n に対して

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\xi]\,] \leqq C' e^{-C\xi^{-\nu/(1-\nu)}} \tag{5.43}$$

が成り立つ．

(iii) $\tilde{\mathrm{P}}_*$ はルベーグ測度に対して C^∞ 級の密度関数 ρ を持つ：$\tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,] = \rho(\xi)\,d\xi$．しかも，

$$\rho(\xi) = 0,\ \xi < 0, \quad \rho(\xi) > 0,\ \xi > 0\,.$$

また $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$ が成り立つ．

(iv) 以下を満たす正数 b_0 がとれる．$b > b_0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$g_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_n} e^{-\xi^2/(2h_n^2)},\ \xi \in \mathbb{R}, \quad h_n = b\,\lambda^{-n}\sqrt{n},$$

とおくとき $\xi \in \mathbb{R}$ について一様に

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi - \eta) \tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\eta\,] = \rho(\xi). \tag{5.44}$$

◇

説明　定理 5.9 の証明は，もう少し詳しい結果とともに補遺 §B.3 に譲る．ここでは，くりこみ群から確率測度の収束や性質が「なぜ導けても不思議はないのか」を簡単に説明しておく．

まず $G_n(s)$ が確率測度の母関数になる点については，$\Phi_n(z)$ は $\Phi_1(z)$ の n 回合成であり，$\Phi_1(z)$ は非負係数のべき級数展開を持つので，$\Phi_n(z)$ のべき級数展開

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k$$

の係数も非負になる（$\Phi_1(z)$ のべき級数展開は仮定によって収束するが，そのとき Φ_n のべき級数展開が $n \to \infty$ で 0 にならない正の収束半径を持つことが §B.1 の証明の技術的核心である）．このとき (5.38) から，

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda^{-n}ks} c_{n,k} x_c^{k-1}$$

となるので，$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = c_{n,k}x_c^{k-1}$ とおけば，$G_n(s)$ は $\tilde{\mathrm{P}}_n$ の母関数になる．このように定義した $\tilde{\mathrm{P}}_n$ が確率測度になることは (5.33) から分かる．

G_n の適当な意味での収束が言えるが，それを認めてくりこみ群 (5.15) の両辺（を G_n を用いて書いた式）の極限をとれば，関数等式 (5.39) を得る．さらに G^* が極限測度（それを $\tilde{\mathrm{P}}_*$ とおく）の母関数になる．(5.39) は $G^*(s)$ の s での振る舞いを s/λ での振る舞いで表すことと，正値性 $G^*(s) \geqq 0$, $s \geqq 0$, によって（(5.39) を s について再帰的に用いることで）$s \to \infty$ での $G^*(s)$ の減衰の様子が分かる．タウバー型定理 (§A) によって，母関数の遠方での減衰の様子は対応する確率測度 $\tilde{\mathrm{P}}_*$ の原点での減衰の様子 (5.41) を定める．

一方，極限測度の母関数 $G^*(s)$ を虚軸方向 ($s = \sqrt{-1}t$, $t \in \mathbb{R}$) にながめると $\varphi^*(t) = G^*(\sqrt{-1}t)$ は極限測度の特性関数となるが，再び (5.39) によって，今度は φ^* の t に関する遠方での減衰が得られる．再帰的証明の出発点として，原点の近くで $|\varphi^*(t)| < 1$ となることが必要になるが，これを保証するのが分散の正値性である．元をただすと Φ_1 に 0 でない項が二つ以上存在するという最初の仮定がここに用いられる．特性関数 φ^* が遠方で減衰することは対応する確率測度の短距離での性質が良い（滑らかである）ことを意味する．より具体的には確率測度がルベーグ測度に対して密度関数を持つことが言える．母関数ないしは特性関数の再帰式は確率測度ないし密度関数の再帰式を意味するが，これから再帰的に ρ の台がちょうど非負実数に等しいことが得られる．

(5.44) は極限測度への収束について局所的な収束の速さを表す．これは $\tilde{\mathrm{P}}_n$ の特性関数 $\varphi_n(t) = G_n(\sqrt{-1}t)$ が $t = O(\lambda^n)$ の範囲で $\varphi^*(t)$ と同程度の減衰をすることから導かれる． ◇

5.3 くりこみ群から確率連鎖へ

§5.2 の議論は path と無関係に (5.32) で定義された Φ_n のくりこみ群 (5.15) の帰結である．この節で path 上の測度 P_n に戻って §5.1 と §5.2 の議論を結びつける．

この節 §5.3 以降，(5.10)（条件 1）を満たす非負定数の組 $\{b_n(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ に対して (5.7) で Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, を定義するとき，Φ_1 が §5.2 の冒頭の条件 2 を満たしているとする（条件 1 から $n \geqq 2$ に対する $\{b_n(w)\}$ は $\{b_1(w)\}$ から定まる一方，$\{b_1(w)\}$ は非負であること以外は条件 2 を通して間接的な弱い制限がつくだけでなので，以下は非常に多くの確率連鎖に対して適用可能である．§5.6 に具体例を与える）．

条件 1, 2 が成り立つので，§5.1 と §5.2 の結果は全て成り立つ．すなわち，(5.16) の x_c を用いて (5.18) で定義される，path 集合 $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度 P_n, $n \in \mathbb{N}$, を考えると (5.20) の λ を用いて (5.21) で定義されるスケールされた歩数分布 $\tilde{\mathrm{P}}_n$ に対して定理 5.9 が成り立つ．結果の一部を再び書いておく．

定理 5.10　以上の設定の下で，(5.18) の P_n の下での $\lambda^{-n}L$ の分布 $\tilde{\mathrm{P}}_n$ は $n \to \infty$ で，ルベーグ測度に対する C^∞ 級密度関数 ρ を持つ確率測度に弱収束する．ρ の台は $\mathbb{R}_+$ である．　◇

大ざっぱに言うと，$\tilde{\Omega}_n$ に属する「典型的な path」の歩数 L は n とともに λ^n に比例して長くなる．

この定理を述べるのに必要な定数 x_c と λ は (5.16) と (5.20) によって決まる．Φ_1 はパラメータ空間 $\mathbb{R}_+$ 上の写像だが path に関する本質的な情報を持つ．このように Φ_1 が定める再帰式 (5.15) はぎざぎざした path の集合という複雑な問題を（少なくともこの節で扱う対象については）低い次元の空間上の力学系の問題に帰着させる方法を与える．さらに，スケールされた歩数分布の極限は，極端に大きい値や小さい値をとる確率が極めて小さいという意味で典型的な path がほとんど全て同程度の長さである，という性質のよい分布であることも，くりこみ群から保証されていることが分かる．このことから歩数分布だけでなく path そのものの確率測度の漸近形について議論

する可能性が開ける．その一つの成果が §5.4 の重複対数の法則の一般化である．

5.3.1 Path の漸近的性質とくりこみ群の関係の概観

きちんとした話に入る前に， 第 I 部で調べた path の漸近的性質の中から変位の指数をくりこみ群解析の立場から簡単にながめなおしてみる．

(5.18) の P_n に関する期待値を E_n と書くことにする．$p > 0$ に対して (5.21) から

$$\mathrm{E}_n[\,(\lambda^{-n}L)^p\,] = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^{-n}k)^p \mathrm{P}_n[\,L = k\,] = \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,]$$

となる．定理 5.9 （を §5.1，すなわち定理 5.10 の設定，に当てはめたもの）から，これは収束する：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_n[\,(\lambda^{-n}L)^p\,] = c_p\,. \tag{5.45}$$

ここで定理 5.9 から

$$c_p = \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \rho(\xi)\,d\xi > 0\,.$$

P_n は，$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$ 上の原点を出発して -1 を通らない path であって 1 に到達してそこで止まるものの集合上の確率測度であったから，L は 1 に達するまでの歩数である．

G_1 の path が 0 から 1 に達するまでの歩数の分布と G_0 の上の path が 0 から 2 に達するまでの歩数の分布は（単に前者の 1 歩ずつの歩幅を 2 倍すると後者になるだけなので）等しい．歩数の分布は 1 歩の歩幅と無関係である．そこで第 I 部に合わせて 1 歩の歩幅を 1 にとり直すと，P_n は $\mathbb{Z}$ 上の path が $x = 2^n$ に達するまでの歩数分布と考えることができる．$\mathrm{E}_n[\,(\lambda^{-n}L)^p\,]$ が 0 でない値に収束するということは大ざっぱに言って典型的な path が点 $x = 2^n$ に到達するのに

$$L(w) \fallingdotseq c\lambda^n = cx^{1/\nu}, \quad \left(\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda}\right), \tag{5.46}$$

だけの歩数を要する，と理解できるだろう．

話をもう少し精密にすると，実際に漸近的性質をきちんと導出するためには，(5.45) のような平均値に関する議論だけでは不十分で，平均的値から極端にはずれた挙動を示す path が少ないことを示す必要がある．実際，(5.45) のように，任意次のモーメントについて（任意の p に対して）同じ指数 λ でスケールするということは，多くの path が平均的挙動をしていることを示唆するが，そのことを数学的に明示的に保証するのが §5.2.2 までのくりこみ群解析で得られた結果，特に定理 5.9 にまとめられた詳細な漸近的性質，である．たとえば (5.41) の結果 (short time estimates) は，「標準的な歩数」に比べて短い歩数 ($x \to 0$) の path が $\exp(-Cx^{\nu/(1-\nu)})$ のように指数関数的に急速にその出現確率が小さくなることを言っている（(5.40) や (5.43) なども同様の内容をあとで使いやすい表現で言い換えている）．

話を戻して確率連鎖とくりこみ群解析の関係の概観を続ける．くりこみ群解析では位置をパラメータとして歩数を確率変数にとるのが自然だが，第 I 部では単純ランダムウォークと self-avoiding path について歩数 k を固定した path の集合上の一様分布を考えたので，歩数がパラメータで位置が確率変数であった．第 I 部と比べるために，試みに (5.46) で $L(w) = k$, $x = W_k$ と書きなおすと，

$$W_k \fallingdotseq k^{\nu} \tag{5.47}$$

これは第 I 部の変位の式 (1.17) の形に近い．すなわち，(5.45) は変位の指数が $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ で与えられることを示唆する．

証明済みの (5.45) から未証明の (5.47) まで正しく導くには考えるべきことがある．くりこみ群から自然に導かれた確率測度 P_n は各 n ごとに特定の点 2^n に達して止まる有限 path の集合の上の測度である．これに対して，変位の指数を考えるときは歩数 k を固定して到達点は自由にした path の集合の上の測度を考えた上でその k についての漸近的な振る舞いをみる．

このとき自然な選択が少なくとも 2 通り考えられる．

(i) これらの path 集合上の測度の列と整合するように確率連鎖を定義する．くりこみ群で考察した path 集合は端点を特別な点に固定して歩数は自由としたが，歩数を固定したときの位置を表す確率変数の無限列を定義

する．

(ii) 歩数を固定するごとに，許される（確率が 0 でない）path は全て等しい重みを与えた確率測度（歩数を固定した path 上の一様分布）を考える．

方法 (ii) の例としては単純ランダムウォーク（全ての path を許す）と self-avoiding path（自分自身と交わらない path のみ許す）が考えられる．第 I 部で見たように単純ランダムウォークでは方法 (i) と方法 (ii) は同じことである．Self-avoiding path の場合は両者は全く違う確率測度の列を与えるが，$\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding path では右向きか左向きの等速直線運動しかないので簡単すぎて問題の本質がかえって見えない．§6 で $\mathbb{Z}$ より少し複雑な図形である Sierpiński gasket の上の self-avoiding path について説明する．

方法 (i) については，くりこみ群から導かれた P_n，すなわち，(5.10) や (5.13) の $\{b_1(w)\}$，の選択に応じて種々の確率連鎖が考えられる．次節 §5.3.2 ではくりこみ群で考察した歩数分布に対応する確率連鎖について詳しく説明し，上に概観した確率連鎖の歩数と到達範囲の関係を重複対数の法則について §5.4 で，変位の指数について §5.5 で，それぞれきちんとした話にする（なお，第 I 部 §2 で注意したが，重複対数の法則のように 1 本の path ごとに歩数が大きくなっていく様子を記述するためには確率連鎖が必要になるので方法 (i) に基づく必要がある）．

5.3.2 確率連鎖との対応

前節 §5.3.1 で概観したことを実行する．すなわち，くりこみ群解析に用いた path 上の測度と確率連鎖との対応を説明する．

§5.3.1 で触れた通り，各 n に対して P_n は歩幅が 2^{-n} の path の集合 $\tilde{\Omega}_n$ の上の確率測度だが，歩幅は n に無関係に 1 とみることができる．$\tilde{\Omega}_n$ の各 path の歩幅を 2^n 倍にした $\mathbb{Z}$ 上の path の集合を $2^n\tilde{\Omega}_n$ と書くことにする．$2^n\tilde{\Omega}_n$ は原点から出発して -2^n を通らずに 2^n に達したとき止まる path の集合になる（図 5.6）．

くりこみ群解析で用いた path 集合とその上の測度 P_n から無限長 path の集合上の測度（確率連鎖）を得るためには二つの点を考えないといけない．

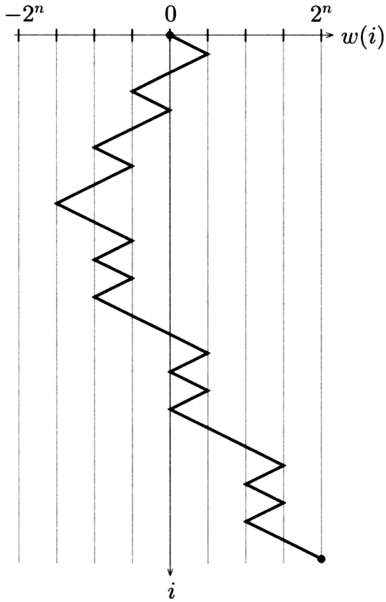


図 5.6

(i) P_n は到達点を固定して path 長は自由とした path の集合上の測度である．これに対して，確率連鎖を得るためには時刻ごとの居場所の分布，言い換えると，path 長を固定したときの到達点の分布が必要である．このためには，特定の点（2^n の形の点）に達する path だけでなく，途中の点までの path に対する確率を P_n と整合するように決める必要がある．

(ii) $2^n\tilde{\Omega}_n$ は点 2^n を点 -2^n より先に hit した path を集めた集合である．他方，長い path の中には逆に点 -2^n を点 2^n より先に hit する path もある．したがって，両方の種類の path を併せた集合を考え，その上の確率を考える必要がある．

第2点については，自然な（かつ，実は自己相似的な唯一の）選択は，P_n を原点に関して対称に折り返すことで -2^n を先に hit する path の集合の上の測度を作り，二つの平均をとることである．

§5.1.1 では n を増やすことは，path の「大まかな形」を変えずに細かい構造を追加することに対応していた（図 5.2）．これに対して $2^{n+1}\tilde{\Omega}_{n+1}$ の path は途中で必ず $\pm 2^n$ を通ることに注目すると，初めて $\pm 2^n$ に達した時刻までの path は $2^n\tilde{\Omega}_n$ の要素か，または，その要素を原点に関して折り返した path になる．後者，すなわち，$2^n\tilde{\Omega}_n$ の各 path を原点に関して折り返した path の集合を $2^n\tilde{\Omega}^r_n$ と書くことにする．Path w を原点で折り返した path は $-w$ だから

$$2^n\tilde{\Omega}^r_n = \{-w \mid w \in 2^n\tilde{\Omega}_n\} \tag{5.48}$$

である（以下，記号を増やさないために $\tilde{\Omega}_n$ などの定義は今までどおり歩幅の小さい path の集合としたまま，歩幅が 1 の path をイメージしながら議論するのであちこちに 2^n がつくが，ここでの 2^n にはそれ以上の意味はない）．$\tilde{\Omega}_n$ は -1 に達する前に 1 に達する path で $\tilde{\Omega}^r_n$ はその逆だから，

$$\tilde{\Omega}_n \cap \tilde{\Omega}^r_n = \emptyset$$

となることに注意しておく．

$2^{n+1}\tilde{\Omega}^r_{n+1}$ の path に対しても同様に，初めて $\pm 2^n$ に達した時刻までの path を対応させることで $2^n\tilde{\Omega}_n \cup 2^n\tilde{\Omega}^r_n$ の要素を対応させることができる．この対応によって path 集合上の対応

$$2^{n+1}\tilde{\Omega}_{n+1} \cup 2^{n+1}\tilde{\Omega}^r_{n+1} \to 2^n\tilde{\Omega}_n \cup 2^n\tilde{\Omega}^r_n$$

を得る．この対応は §5.1.1 の decimation とは違って，path の最初の部分をとりだす対応である．

$\tilde{\Omega}_n$ 上に確率測度 P_n が定義されていたのにならって，$\tilde{\Omega}^r_n$ 上にも確率測度 $\mathrm{P}_{r,n}$ を定義する．自然な定義として左右対称にとって

$$\mathrm{P}_{r,n}[\,\{w\}\,] = \mathrm{P}_n[\,\{-w\}\,], \quad w \in \tilde{\Omega}^r_n, \tag{5.49}$$

とする．

定理 5.11　(5.10) を満たす非負定数の組

$$\{b_n(w) \geqq 0 \mid w \in \tilde{\Omega}_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$

を用いて (5.7), (5.16), (5.18), (5.48), (5.49) によって定義される確率空間の列 $(\tilde{\Omega}_n, \mathrm{P}_n), (\tilde{\Omega}_n^r, \mathrm{P}_{r,n})$, $n \in \mathbb{N}$, に対して以下を満たす $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \ldots,$ が存在する.

任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ と任意の $w = (w(0), w(1), w(2), \ldots, w(k)) \in \Omega_k$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\, W_j = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,k \,] \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\{w' = (w'(0), w'(1), w'(2), \ldots, w'(L(w'))) \in \tilde{\Omega}_n \mid \\
&\qquad\qquad\qquad 2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{r,n}[\{w' = (w'(0), w'(1), w'(2), \ldots, w'(L(w'))) \in \tilde{\Omega}_n^r \mid \\
&\qquad\qquad\qquad 2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}],
\end{aligned} \tag{5.50}$$

が,

$$|w(j)| < 2^n,\ j = 0,1,2,\ldots,k-1, \tag{5.51}$$

を満たす任意の自然数 n に対して成り立つ. ◇

注 5.12　0 から 2^n まで歩幅 1 の path は 2^n 歩以上必要だから, $2^n \geqq k$ ならば (5.51) は成り立つ. ◇

(5.50) は歩数を固定して途中で止まる path に対して確率測度を定義している. この定理の証明の要点は, この定義が P_n の列と整合することすなわち (5.50) の右辺が n によらずに定まること, それから, P_n と $\mathrm{P}_{r,n}$ という二つの確率測度の平均をとること, である. 無限長にのばすことはコルモゴロフの拡張定理からほぼ自動的になる. 定理 5.11 の証明は初等的だが, 少し長いので補遺 §C にまわす.

後の便宜のため定理 5.11 から得られる簡単な結果を書いておく.

系 5.13　$n \in \mathbb{N}$, $w \in 2^n\tilde{\Omega}_n$ ならば, 定理 5.11 で構成した確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \ldots,$ に対して

$$\mathrm{P}[\, W_j = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,L(w) \,] = \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\, \{2^{-n}w\} \,]. \tag{5.52}$$

□

証明 定理 5.11 で $w \in 2^n\tilde{\Omega}_n$ として $k = L(w)$ とおくと，$\tilde{\Omega}_n$ の定義から (5.51) が成り立つので，定理 5.11 から

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\, W_j = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,L(w)\,] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\,\{w' \in \tilde{\Omega}_n \mid 2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(w)\}\,] \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{r,n}[\,\{w' \in \tilde{\Omega}_n^r \mid 2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(w)\}\,] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}_n[\,\{2^{-n}w\}\,].
\end{aligned}$$

ここで，$w \in 2^n\tilde{\Omega}_n$ であることから $2^n w'(j) = w(j), j = 0,1,2,\ldots,L(w)$, なる $w' \in \tilde{\Omega}_n$ はただ一つ $2^{-n}w$ だけであること，および，$\tilde{\Omega}_n \cap \tilde{\Omega}_n^r = \emptyset$ だから，$2^n w'(j) = w(j), j = 0,1,2,\ldots,L(w)$, なる $w' \in \tilde{\Omega}_n^r$ は存在しないこと，を用いた． □

くりこみ群の固定点から自然に定義される確率 $(\tilde{\Omega}_n, \mathrm{P}_n)$ と対応する確率連鎖 $(\mathrm{P}, \{W_k\})$ の関係は定理 5.11 で与えられた．ところで定理 5.10 でみたように，(5.21) で導入した $\tilde{\Omega}_n$ のスケールされた歩数分布 $\tilde{\mathrm{P}}_n$ はくりこみ群から定量的な性質が最初に分かる量なので，確率連鎖 $W_k, k \in \mathbb{Z}_+$, にとっても，種々の評価の出発点になる．そこで，この量を $W_k, k \in \mathbb{Z}_+$, の言葉に翻訳しておく．

$W_k, k \in \mathbb{Z}_+$, の $A \subset \mathbb{Z}$ への到達時刻を T_A と書く：

$$T_A = \inf\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid W_j \in A\} \tag{5.53}$$

(第 I 部 §3.4.1 では到達時刻は時刻 0 を除いて定義した．以下では通常の定義に従って 0 を許すが，実際は T_A が大きいときに興味があるので，違いは重要ではない)．

系 5.14 (5.21) で導入した $\tilde{\Omega}_n$ のスケールされた歩数分布 $\tilde{\mathrm{P}}_n$ は $\tilde{\mathrm{P}}_n = \mathrm{P} \circ (\lambda^{-n}T_{\{\pm 2^n\}})^{-1}$，すなわち，

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \mathrm{P}[\,T_{\{\pm 2^n\}} = k\,],\quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.54}$$

を満たす．すなわち $\lambda^{-n}T_{\{\pm 2^n\}}$ の分布に等しい． ◇

証明　(5.21) と系 5.13 から,

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = 2 \bigcup_{w\in 2^n\tilde{\Omega}_n;\ L(w)=k} \mathrm{P}[\,W_j = w(j),\ j=0,1,\ldots,k\,].$$

さらに

$$\tilde{\mathrm{P}}_{r,n}[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \mathrm{P}_{r,n}[\,\{w\in\tilde{\Omega}^r_n \mid L(w)=k\}\,],\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

によって $\tilde{\mathrm{P}}_{r,n}$ を定義すると，(5.49) から，左右対称性

$$\tilde{\mathrm{P}}_{r,n}[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,]$$

を得るので,

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \bigcup_{w\in 2^n\tilde{\Omega}_n\cup 2^n\tilde{\Omega}^r_n;\ L(w)=k} \mathrm{P}[\,W_j = w(j),\ j=0,1,\ldots,k\,].$$

一方，$\tilde{\Omega}_n$ の定義から $w\in 2^n\tilde{\Omega}_n$ ということは path w が $T_{2^n}(w) < T_{-2^n}(w)$ かつ $L(w)=T_{2^n}$ を満たすことと同値であり，$w\in\tilde{\Omega}^r_n$ は $T_{2^n}(w) > T_{-2^n}(w)$ かつ $L(w)=T_{-2^n}$ と同値だから，併せると，$w\in 2^n\tilde{\Omega}_n\cup 2^n\tilde{\Omega}^r_n$ は $L=T_{\{\pm 2^n\}}<\infty$ と同値である．よって

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \mathrm{P}[\,T_{\{\pm 2^n\}} = k\,].$$

□

確率連鎖 W_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, はそれを構成した（存在を証明した）定理 5.11 で明示したように (5.10) を満たす非負定数の組 $\{b_n(w)\}$ に基づいてその法則が与えられていて，(5.10) の形から歩数に関するマルコフ性（第 I 部 §3 (3.12)）は一般には期待できない（もちろん全ての w と n に対して $b_n(w)=1$ とおけば単純ランダムウォークになるので，特別な場合はマルコフ性があるが，一般的にはそれは保証されていない）．しかし，(5.53) の到達時刻のうち特別な列

$$T_n = T_{\{\pm 2^n\}},\quad n=0,1,2,3,\ldots, \tag{5.55}$$

は，空間的な広がり（スケール）を表す変数 n を時刻と見るとマルコフ性に類似の性質がある．これは，(5.10) に基づいて構成した確率連鎖は，いろいろなスケールの「ぎざぎざ」が独立で，それらが重なって一つの確率連鎖になっている，という，くりこみ群の描像がみやすいものであることを意味する（そのような意図で (5.10) を最初に仮定した）．重複対数の法則の下からの評価 (§5.4.2) で使う形でこの性質を書いておく．

命題 5.15 (5.55) の到達時刻の列は以下を満たす．

(i) T_n と $T_{n+1}-T_n$ は独立である．すなわち，任意の $c,d \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{P}[\,T_n \leqq c, T_{n+1}-T_n \leqq d\,] = \mathrm{P}[\,T_n \leqq c\,]\,\mathrm{P}[\,T_{n+1}-T_n \leqq d\,].$$

(ii) n, N を $N > n$ を満たす非負整数とするとき，$T_{n+1},\ldots,T_N$ に関する T_n の条件付き確率は T_{n+1} に対する条件だけで定まる条件付き確率に等しい．すなわち，k_m, $m=n,n+1,\ldots,N$, を $k_n < k_{n+1} < \cdots < k_N$ を満たす非負整数とするとき

$$\mathrm{P}[\,T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1},\ldots,T_N = k_N\,] = \mathrm{P}[\,T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1}\,].$$

◇

注 5.16 補遺 §F.2 で注意したように，後半からさらに，$A_n = \{T_n \leqq c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, なる事象列をとるとき，

$$\mathrm{P}[\,A_n \mid \sigma[A_{n+1},\ldots,A_N]\,] = \mathrm{P}[\,A_n \mid \sigma[A_{n+1}]\,]$$

を得る． ◇

証明 (i) 系 5.13 と (5.18)，および系 5.5 を順次用いると

$$\mathrm{P}[\,T_n \leqq c, T_{n+1}-T_n \leqq d\,] = \sum_{\substack{w\in\tilde{\Omega}_{n+1};\\ T_{n,1}(w)\leqq c,\,L(w)-T_{n,1}(w)\leqq d}} b_{n+1}(w)\,{x_c}^{L(w)-1}$$

$$= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_1} b_1(w') {x_c}^{L(w')-1}$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_n; \\ L(\tilde{w}_1) \leqq c}} b_n(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1} \sum_{\substack{\tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')} \in \tilde{\Omega}_n; \\ L(\tilde{w}_2) + \cdots + L(\tilde{w}_{L(w')}) \leqq d}} \prod_{j=2}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j) {x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}.$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{w} \in \tilde{\Omega}_n; \\ L(\tilde{w}) \leqq c}} b_n(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w})-1}$$

$$\times \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_1} b_1(w') {x_c}^{L(w')-1} \sum_{\substack{\tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')} \in \tilde{\Omega}_n; \\ L(\tilde{w}_2) + \cdots + L(\tilde{w}_{L(w')}) \leqq d}} \prod_{j=2}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j) {x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}.$$

$$= \mathrm{P}[\, T_n \leqq c \,] \mathrm{P}[\, T_{n+1} - T_n \leqq d \,].$$

最後のほうの変形で，$w' \in \tilde{\Omega}_1$ の歩数は 2 歩以上あるので，path の断片からくる因子は一つ以上存在すること，および，その因子は $w' \in \tilde{\Omega}_1$ によらないことから，因子を一つ w' に関する和の前にくくりだした.

(ii) 上と同様の変形によって

$$\mathrm{P}[\, T_n = k_n, T_{n+1} = k_{n+1}, \ldots, T_N = k_N \,] = \sum_{\substack{w \in \tilde{\Omega}_N; \\ T_{n,1}(w) = k_n, \\ \ldots, \\ T_{N-1,1}(w) = k_{N-1} \\ L(w) = k_N}} b_N(w) {x_c}^{L(w)-1}$$

$$= \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_1} b_1(w') {x_c}^{L(w')-1}$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_{N-1}; \\ T_{n,1}(\tilde{w}_1) = k_n, \\ \ldots, \\ T_{N-2,1}(\tilde{w}_1) = k_{N-2}, \\ L(\tilde{w}_1) = k_{N-1}}} b_{N-1}(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1}$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')} \in \tilde{\Omega}_{N-1}; \\ L(\tilde{w}_2) + \cdots + L(\tilde{w}_{L(w')}) = k_N - k_{N-1}}} \prod_{j=2}^{L(w')} b_{N-1}(\tilde{w}_j) {x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}.$$

$$= \sum_{\substack{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_{N-1};\\ T_{n,1}(\tilde{w}_1)=k_n,\\ \dots,\\ T_{N-2,1}(\tilde{w}_1)=k_{N-2},\\ L(\tilde{w}_1)=k_{N-1}}} b_{N-1}(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1}$$

$$\times \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_1} b_1(w') {x_c}^{L(w')-1}$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{w}_2,\dots,\tilde{w}_{L(w')} \in \tilde{\Omega}_{N-1};\\ L(\tilde{w}_2)+\cdots+L(\tilde{w}_{L(w')})=k_N-k_{N-1}}} \prod_{j=2}^{L(w')} b_{N-1}(\tilde{w}_j) {x_c}^{L(\tilde{w}_j)-1}.$$

この式と，この式で n を $n+1$ に置き換えたものの比をとると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\, T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1}, \dots, T_N = k_N \,] \\
&= \frac{\mathrm{P}[\, T_n = k_n, T_{n+1} = k_{n+1}, \dots, T_N = k_N \,]}{\mathrm{P}[\, T_{n+1} = k_{n+1}, \dots, T_N = k_N \,]} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_{N-1};\\ T_{n,1}(\tilde{w}_1)=k_n,\, T_{n+1,1}(\tilde{w}_1)=k_{n+1},\dots,T_{N-2,1}(\tilde{w}_1)=k_{N-2},\\ L(\tilde{w}_1)=k_{N-1}}} b_{N-1}(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1}}{\displaystyle\sum_{\substack{\tilde{w}_1 \in \tilde{\Omega}_{N-1};\\ T_{n+1,1}(\tilde{w}_1)=k_{n+1},\dots,T_{N-2,1}(\tilde{w}_1)=k_{N-2},\\ L(\tilde{w}_1)=k_{N-1}}} b_{N-1}(\tilde{w}_1) {x_c}^{L(\tilde{w}_1)-1}} \\
&= \mathrm{P}[\, T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1}, \dots, T_{N-1} = k_{N-1} \,].
\end{aligned}$$

よって，N についての帰納法から，

$$\mathrm{P}[\, T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1}, \dots, T_N = k_N \,] = \mathrm{P}[\, T_n = k_n \mid T_{n+1} = k_{n+1} \,].$$

□

5.4 一般化された重複対数の法則

一般化された重複対数の法則をくりこみ群解析から導いてみよう．以下この節でも明示的に断らない限り §5.3 と同じ設定，すなわち，(5.10) を満たす非負定数の組 $\{b_n(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ に対して (5.7) で Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, を定義

し，Φ_1 が §5.2 の冒頭の条件 2 を満たしているとし，さらに，(5.16) の x_c を用いて (5.18) で定義される $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度 P_n, $n \in \mathbb{N}$, に対応して定理 5.11 で与えられる $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, を考える．この節では次を証明する．

定理 5.17　上記 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, について一般化された重複対数の法則が成り立つ．すなわち，$C_\pm > 0$ が存在して

$$C_- \leqq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{\psi(k)} \leqq C_+\,,\ a.e..$$

ここで $\psi(k) = k^\nu (\log\log k)^{1-\nu}$ とおいた．ψ の指数に現れる定数 ν はくりこみ写像 Φ_1 の固定点 x_c での微分係数 $\lambda = \Phi_1'(x_c)$ を用いて (5.42)，すなわち，$\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ で与えられる．　◇

指数 ν が Φ_1 の固定点 x_c での微分係数 $\lambda = \Phi_1'(x_c)$ だけで決まっている．くりこみ群が一般化された重複対数の法則の指数を定めている． なお，命題 5.6 から

$$0 < \nu < 1 \tag{5.56}$$

となる．

重複対数の法則はマルコフ過程に対しては広く成り立つことが知られている（たとえば [T10, §VIII.5]）が，その議論は下からの評価についてはマルコフ性を用いている．§5.3.2 の確率連鎖は一般にマルコフ性を持たないので，定理 5.17 はくりこみ群の方法が標準的な方法や結果のおよばないところに適用可能であることを示す意義がある．

5.4.1　一般化された重複対数の法則——上からの評価

第 I 部 §2.3 の定理 2.10 は（単純ランダムウォークでなくても）任意の確率連鎖に対して成り立つから，§5.3.2 の確率連鎖 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, に対してその仮定が成り立つことを示せば結論，すなわち，一般化された重複対数の法則の上からの評価を得る．

$x \in \mathbb{N}$ に対して $n = n(x) = \left[\dfrac{\log x}{\log 2}\right]$ とおく．すなわち，

$$2^{n(x)+1} > x \geqq 2^{n(x)}. \tag{5.57}$$

本書で考えている確率連鎖は全て 1 歩につき隣の点にしか移らないので (5.53) の到達時刻について

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j|>2^n-1\,]=\mathrm{P}[\,T_{\{\pm 2^n\}}\leqq k\,],\quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{5.58}$$

であることに注意して系 5.14 を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j|\geqq x\,]\leqq\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j|>2^n-1\,]&=\mathrm{P}[\,T_{\{\pm 2^n\}}\leqq k\,]\\&=\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\lambda^{-n}k]\,].\end{aligned}$$

さらにタウバー型定理（定理 5.9(ii) の (5.43)）から k, n に関係ない $C>0$, $C'>0$, $C''>0$ が存在して，$2^{-n}k\geqq C''$ なる任意の k と n に対して

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\lambda^{-n}k]\,]\leqq C'e^{-C(\lambda^{-n}k)^{-\nu/(1-\nu)}}$$

が成り立つ．

$u_+>0$ を任意にとり，$x\leqq u_+k^{\nu}(\log\log k)^{1-\nu}$ とすると，(5.57) から

$$2^{-n}k\geqq x^{-1}k\geqq\frac{1}{u_+}\left(\frac{k}{\log\log k}\right)^{1-\nu}$$

なので，k が大きければ $2^{-n}k\geqq C''$ となるから，以上から

$$\mathrm{P}[\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j|\geqq x\,]\leqq C'e^{-C(\lambda^{-n}k)^{-\nu/(1-\nu)}}\leqq C'e^{-C(xk^{-\nu}/2)^{1/(1-\nu)}} \tag{5.59}$$

が成り立つ．すなわち，(2.11) が $C_{+,1}=C'$, $C_{+.2}=C2^{-1/(1-\nu)}$, および，$u_+>C_{+,2}^{-(1-\nu)}$ なる任意の u_+ と十分大きな $C_{+,3}$ に対して成り立つので，定理 2.10 から一般化された重複対数の法則の上からの評価

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{|W_k|}{\psi(k)}\leqq C^{-(1-\nu)},\ a.e.,$$

を得る．

5.4.2 一般化された重複対数の法則――下からの評価

上からの評価において §2.3 の定理 2.10 が重複対数の法則と到達時刻（歩数）の分布を結びつけたように，重複対数の法則の下からの評価を証明する準備のために到達時刻の分布の言葉で書いた十分条件から始める．

命題 5.18　$\mathbb{Z}$ に値をとる確率変数列 $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, に対して，0 を除く $\tilde{G}_n = 2^n\mathbb{Z}$ の到達時刻を T_n と書く：

$$T_n = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid W_k \in \tilde{G}_n \setminus \{0\}\}$$

このとき，$\lambda > 2$ （すなわち $0 < \nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda} < 1$）に対して

$$\mathrm{P}[\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{(\log m)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-m} T_m \leqq c\}\ ] = 1 \tag{5.60}$$

となる $c > 0$ があれば，すなわち，$(\log n)^{(1-\nu)/\nu} \lambda^{-n} T_n \leqq c$ が無限個の n に対して成り立てば（正確に言うと，無限個に対して成り立つということの起こる確率が 1 ならば），

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{\psi(k)} \geqq c^{-\nu},\ \ a.e.,$$

が成り立つ．　◇

注 5.19　この命題のみは $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, が定理 5.11 で与えられた確率連鎖でなくてもかまわない．本書では扱わないが，重複対数の法則の下からの評価は W_k が遠くに達するという主張だから，1 歩ごとに隣に移る必要はない．

0 から出発して 1 歩ごとに隣に移る確率連鎖の場合は $T_n = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid W_k \in \{\pm 2^n\}\}$ となるから，特に定理 5.11 で構成された $W_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, については (5.55) の T_n とこの命題の T_n は同じものである．　◇

証明　(5.60) の不等式が成り立つ $\omega \in \Omega$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ をとって $k = T_n(\omega)$ とおくと，

$$|W_k(\omega)| \geqq 2^n,\quad k \leqq c\lambda^n (\log n)^{-(1-\nu)/\nu}.$$

よって

$$2^n \geqq c^{-\nu} k^{\nu} (\log n)^{1-\nu}, \tag{5.61}$$

および $n \geqq 3$ で

$$n \geqq \frac{\log k - \log c}{\log \lambda} + \frac{1-\nu}{\nu} \frac{\log\log n}{\log \lambda} \geqq \frac{\log k - \log c}{\log \lambda}$$

を得て，これからさらに，

$$\log n \geqq \log\log k + \log\left(1 - \frac{\log c}{\log k}\right) - \log\log\lambda$$

となるので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，k_0 がとれて

$$\log n \geqq (1-\epsilon)\log\log k, \quad k \geqq k_0 .$$

これを (5.61) に代入すると

$$|W_k(\omega)| \geqq 2^n \geqq c^{-\nu} k^{\nu} (1-\epsilon)^{1-\nu} (\log\log k)^{1-\nu}$$

を得る．仮定から，これが成り立つ k が無数にあるから

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k(\omega)|}{\psi(k)} \geqq (1-\epsilon)^{1-\nu} c^{-\nu}$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意だったから，

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k(\omega)|}{\psi(k)} \geqq c^{-\nu}$$

だが，このような ω が確率 1 で存在するのだから主張を得る． □

一般化された重複対数の法則の下からの評価を証明する（以下は [14] の連続時間の短時間挙動における対応する結果とほぼ同様の議論である）．$\tilde{C} > 0$ を任意に固定し，$\alpha_n = \tilde{C}(\log n)^{-(1-\nu)/\nu}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, とおく．定理 5.9(ii) と系 5.14 から $\tilde{C}$ によらない $C, C' > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} -C &\leqq \varliminf_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}[\, T_n \leqq \lambda^n \alpha_n \,] \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}[\, T_n \leqq \lambda^n \alpha_n \,] \leqq -C'. \end{aligned} \tag{5.62}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$S_n = \lambda^{-n} (\log n)^{(1-\nu)/\nu} T_n, \quad \tilde{S}_n = \lambda^{-n-1} (\log(n+1))^{(1-\nu)/\nu} (T_{n+1} - T_n),$$

および $\beta_n = \dfrac{(\log(n+1))^{(1-\nu)/\nu}}{\lambda(\log n)^{(1-\nu)/\nu}}$ とおけば，$S_{n+1} = \beta_n S_n + \tilde{S}_n$ であって，$\lambda > 1$ なので n が十分大きければ $0 < \beta_n < 1$ である．事象列 A_n, $n \in \mathbb{N}$, を $A_n = \{S_n \leqq \tilde{C}\}$ で定義する．命題 5.15 とその注から

$$\mathrm{P}[\, A_n \mid \sigma(A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_N)\,] = \mathrm{P}[\, A_n \mid \sigma(A_{n+1})\,], \quad N > n,$$

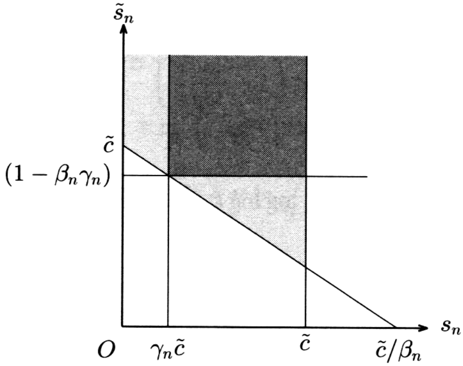


図 5.7

であることに注意.

$0 < \gamma_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, を満たす数列 $\{\gamma_n\}$ を任意に固定する．命題 5.15 から S_n と $\tilde{S}_n$ が独立なことに注意して，積分範囲の台形領域を矩形領域で下から評価する（図 5.7）と，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\, A_n \cap {A_{n+1}}^c \,] &= \mathrm{P}[\, S_n \leqq \tilde{C},\ \beta_n S_n + \tilde{S}_n > \tilde{C} \,] \\
&\geqq \mathrm{P}[\, \tilde{C}\gamma_n < S_n \leqq \tilde{C},\ \tilde{S}_n > (1-\beta_n\gamma_n)\tilde{C} \,] \\
&= \mathrm{P}[\, \tilde{C}\gamma_n < S_n \leqq \tilde{C} \,]\, \mathrm{P}[\, \tilde{S}_n > (1-\beta_n\gamma_n)\tilde{C} \,].
\end{aligned}$$

定理 5.9 と系 5.14 から $\lambda^{-n}T_n$ が $n \to \infty$ のとき弱収束するので，$\mathrm{P}[\, \tilde{S}_n > \tilde{C} \,]$ は 1 に収束する．よって，十分大きい n に対して，たとえば 1/2 で下から評価できる．一方，(5.62) から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きい n では

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}[\, \tilde{C}\gamma_n < S_n \leqq \tilde{C} \,] \\
&\quad = \mathrm{P}[\, T_n \leqq \tilde{C}\lambda^n (\log n)^{-(1-\nu)/\nu} \,] - \mathrm{P}[\, T_n \leqq \tilde{C}\gamma_n\lambda^n (\log n)^{-(1-\nu)/\nu} \,] \\
&\quad \geqq n^{-(C+\epsilon)\tilde{C}^{-\nu/(1-\nu)}} - n^{-(C'-\epsilon)(\tilde{C}\gamma_n)^{-\nu/(1-\nu)}}.
\end{aligned}$$

$\tilde{C} > 0$ と $0 < \gamma_n < 1$ は任意で，C, C' はこれらの量によらないから，$\tilde{C} \geqq (C+\epsilon)^{(1-\nu)/\nu}$ および $\gamma_n < (C'-\epsilon)^{(1-\nu)/\nu}/\tilde{C}$ を満たすように選べば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}[\, A_n \cap A_{n+1}{}^c \,] = \infty$$

を得る.

以上によって，ボレル・カンテリ第2定理（定理 F.11）から

$$\mathrm{P}[\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\lambda^{-m} T_m (\log m)^{(1-\nu)/\nu} \leqq (C+\epsilon)^{(1-\nu)/\nu}\} \,] = 1$$

を得るので，命題 5.18 から，一般化された重複対数の法則の下からの評価

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{\psi(k)} \geqq C^{\nu-1}, \ a.e.,$$

を得る.

5.5 変 位 の 指 数

この節でも §5.3 と同じ設定，すなわち，(5.10) を満たす非負定数の組 $\{b_n(w) \mid w \in \tilde{\Omega}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ に対して (5.7) で Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, を定義したとき Φ_1 が §5.2 の冒頭の条件 2 を満たしているとする．そして (5.16) の x_c を用いて (5.18) で定義される $\tilde{\Omega}_n$ 上の確率測度 P_n, $n \in \mathbb{N}$, に対応して定理 5.11 で与えられる $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖 W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, を考える.

第 I 部で $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークの場合に変位の指数，すなわち，

$$\mathrm{E}[\, |W_k|^s \,] \doteqdot k^{s\nu}, \quad s > 0,$$

を満たす ν が $\nu = 1/2$ であることを見た (§1.3, §3.2)．そこでの議論はマルコフ性（あるいは増分 $W_{k+1} - W_k$ の独立性）が本質的だったので，この節 §5 で議論している確率連鎖には適用できない.

変位に関する上からの評価と下からの評価はその内容が異なる．上からの評価は重複対数の法則の上からの評価と類似の内容を持っている．すなわち，確率連鎖の典型的な path がぎざぎざしているために，歩数に比べてあまり遠くには行けない，という，くりこみ群の描像そのものである． 他方，下からの評価は，重複対数の法則の下からの評価とは異なる側面がある．重複対数の法則は歩数に比べてどこまで遠くに行きうるかについての上下から

の評価なのに対して，変位は同じ歩数で遠くにいる path も偶然原点の付近に戻っている path も平均するので，ある歩数で（遠くまで行ってから）原点に戻る path が遠くに行ったままの path に比べて確率が大きくないことを言わないといけない．

§5.6.3 で紹介する self-repelling walk は，命題 1.8 で単純ランダムウォークの場合に紹介した反射原理と類似の幾何的考察による path の対応によって変位の下からの評価を得ることができて，指数が定まることが分かっている．

定理 5.20 ([22])　任意の $u>0$ に対して，§5.6.3 の self-repelling walk $W_k=W_{u,k}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, について，$\nu=\nu_u$ を，W_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, に対応するくりこみ写像からいつものように (5.65) によって定めるとき，変位の指数が次の意味で ν に等しい，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\log k}\log \mathrm{E}[\ |W_k|^s\ ]=s\nu,\quad s\geqq 0\,.$$

◇

知られている証明は下からの評価は技術的に細かくなるので証明は原著 [22] に譲り，以下では上からの評価だけに話をとどめる．

上からの評価は §5 で扱った任意の確率連鎖に対して証明できる．しかも，「log 比」よりもわずかに強い主張が言える．

命題 5.21　$s\geqq 0$ ならば，任意の $\epsilon>0$ に対して $C=C_{s,\epsilon}>0$ が存在して

$$\mathrm{E}[\ |W_k|^s\ ]\leqq C(k^{\nu}(\log k)^{1-\nu+\epsilon})^s,\quad k\geqq 1\,.$$

◇

注 5.22　k^{ν} の指数 ν は（下からの評価があるので）正しい（最善の）値だが，$\log k$ の指数 $1-\nu$ は以下の証明だけからは最善かどうか分からない．実際，単純ランダムウォークのときは「log 補正」はつかないはずなので，正しい形よりも弱い．但し，k^{ν} に対する補正が $\log k$ の有限べき乗で抑えられることは保証されたことになる．　◇

証明 定理 5.9(ii) から，k, n によらない正定数 C, C', C'' が存在して

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0, \lambda^{-n}k]\,] \leqq C' \exp\left(-C(\lambda^{-n}k)^{-\nu/(1-\nu)}\right), \quad k \geqq C''2^n.$$

そこで，$\delta > 0$ を任意に選んで $k \geqq 1$ に対して

$$n_0(k) = \left[\frac{\log k}{\log \lambda} + \delta \log\log k\right]$$

とおくと，

$$2^{n_0(k)} \leqq k^{\nu}(\log k)^{\delta \log 2}$$

となるが，命題 5.6 から $\lambda > 2$ なので $0 < \nu < 1$ だから右辺は十分大きな k_0 に対して $k \geqq k_0$ のとき k/C'' 以下になるから，

$$\tilde{\mathrm{P}}_{n_0(k)}[\,[0, \lambda^{-n_0(k)}k]\,] \leqq C' \exp\left(-C(\lambda^{-n_0(k)}k)^{-\nu/(1-\nu)}\right), \quad k \geqq k_0\,.$$

k 歩の path は原点から k 以上離れることはできないことに注意すると，(5.58) と系 5.14 から $k \geqq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,|W_k|^s\,] &\leqq \mathrm{E}[\,\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j|^s\,] = \sum_{\ell=0}^{k} \ell^s \mathrm{P}[\,\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j| = \ell\,] \\
&\leqq k^s \mathrm{P}[\,\max_{0\leqq j\leqq k}|W_j| \geqq 2^{n_0}\,] + 2^{n_0 s} = k^s \mathrm{P}[\,T_{\{\pm 2^{n_0}\}} \leqq k\,] + 2^{n_0 s} \\
&= k^s \tilde{\mathrm{P}}_{n_0}[\,[0, \lambda^{-n_0}k]\,] + 2^{n_0 s} \\
&\leqq k^s C' \exp\left(-C(\lambda^{-n_0(k)}k)^{-\nu/(1-\nu)}\right) + k^{s\nu}(\log k)^{s\delta \log 2}, \quad k \geqq k_0\,.
\end{aligned}$$

$n_0(k)$ の定義から

$$\lambda^{-n_0(k)}k \leqq \lambda^{-\frac{\log k}{\log \lambda} - \delta \log\log k + 1}k \leqq \lambda(\log k)^{-\delta \log \lambda}$$

なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,|W_k|^s\,] \leqq C' \exp&\left(-C\lambda^{-\nu/(1-\nu)}(\log k)^{\delta\nu \log \lambda/(1-\nu)} + s \log k\right) \\
&+ k^{s\nu}(\log k)^{s\delta \log 2}, \quad k \geqq k_0\,.
\end{aligned}$$

$\delta = \dfrac{1-\nu+\epsilon}{\nu \log\lambda} = \dfrac{1-\nu+\epsilon}{\log 2}$ と選べば第1項は k に関して有界になるから，このとき $C_{s,\epsilon} > 0$ が存在して，

$$\mathrm{E}[\,|W_k|^s\,] \leqq C_{s,\epsilon}(k^\nu(\log k)^{1-\nu+\epsilon})^s,\quad k \geqq k_0\,.$$

□

5.6　確率連鎖の例

最後にこの節 §5 の結果が適用できる確率連鎖の具体例を挙げる．

5.6.1　$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク

第I部の §1 と §2 で調べた $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに戻って，この節 §5 のくりこみ群による結果が一致することを確認する．

§5.1.3 で見たように，$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに対応する (5.7) の $\{b_n\}$ は (5.28) で与えられ，特に $\Phi_1(z) = \dfrac{z^2}{1-2z^2}$ なので $x_c = \dfrac{1}{2}$ であり，したがって $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 4$, $\nu = \dfrac{\log 2}{\log\lambda} = \dfrac{1}{2}$ となる．定理 5.20 の変位の指数は $\nu = \dfrac{1}{2}$ となって第I部 §1 の (1.15) を再現し，また，重複対数の法則は定理 5.17 において $|W_k|$ の歩数 k に対する漸近的な増大度を示す ψ が

$$\psi(k) = k^\nu(\log\log k)^{1-\nu} = \sqrt{k(\log\log k)}$$

で与えられるので第I部 §2 定理 2.7 の単純ランダムウォークに対する重複対数の法則の漸近形を再現する．

5.6.2　$\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding walk

$n \in \mathbb{N}$ に対して (5.7) の $\{b_n\}$ を，各 $w \in \tilde{\Omega}_n$ に対して

$$b_n(w) = \begin{cases} 1, & 2^n w(k) = k,\ k = 0,1,2,\dots,2^n,\ \text{のとき}, \\ 0, & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

で与える（つまり，まっすぐ進む path のみに weight を与える）．これは (5.10) を満たし，(5.12) の Φ_1 は (5.13) から $\Phi_1(z) = z^2$ となるので，単項

式だから収束半径は無限大である．§5.2 の冒頭の条件 2 の仮定のうち「少なくとも一つの $k \geqq 3$ に対して $c_k > 0$」という条件だけは満たさないので，定理 5.9 は必ずしも成立が保証されない．実際，$\tilde{\mathrm{P}}_*$ は密度関数 ρ を持たない．なぜなら，全ての n に対して P_n はまっすぐな path ただ 1 本に集中した単位分布なので，極限も単位分布になるから，Lebesgue 測度に対して密度を持つことはない．しかし，$\Phi_n(z) = z^{2^n}$ となることから，§5 の一般論によらずとも直接計算することで，密度に関する主張以外の §5 の全ての結果が成り立つことが分かる．対応する確率連鎖が $\dfrac{1}{2}$ の確率で原点からまっすぐ右に行く path かまっすぐ左に行く path を与えることも直接分かるので，変位の指数も重複対数の法則も $\lambda = 2$, $\nu = 1$, $(\psi(k) = k)$ で与えられる．これは $\Phi_1(z) = z^2$ から $x_c = 1$, $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 2$ として得られたものと一致し，くりこみ群解析が自明な意味で成り立っている場合ということができる．

$\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding walk は単純ランダムウォークと指数 ν も path の典型的な形も全く異なるので興味深いが，いかんせん，path 自体は原点から出発して右あるいは左にまっすぐ進むしかないので，確率連鎖の例としては説得力に欠けるかもしれない．§6 で，特別なフラクタルの上の self-avoiding path を考え，くりこみ群解析を行う．そこでは自明でない self-avoiding path の集合上の確率測度をくりこみ群で解析する．

5.6.3　$\mathbb{Z}$ 上の self-repelling walk

自明でない例として，単純ランダムウォークと self-avoiding walk の（変位や重複対数の法則の）指数 ν を連続的に内挿する確率連鎖の族 (self-repelling walk) が存在すること，しかもくりこみ群の立場からは簡単に見つけられること，を [14, 22] に従って紹介する．

§5.6.2 と §5.6.3 で確認したように，$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークと $\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding walk に対応するくりこみ群の Φ_1 はそれぞれ

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{1-2z^2}, & \text{単純ランダムウォーク}, \\ z^2, & \text{self-avoiding walk}, \end{cases}$$

なので，もっとも単純な内挿として，$u \in [0,1]$ をパラメータとする Φ_1 の族

$$\Phi_{1,u}(z) = \frac{z^2}{1-2u^2z^2}, \quad |z| < \frac{1}{u\sqrt{2}}, \tag{5.63}$$

を考え，

$$\Phi_{n+1,u}(z) = \Phi_{1,u}(\Phi_{n,u}(z)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.64}$$

によって，一般の Φ_n を定義する（(5.7), (5.63) を見比べることで $\{b_1(w)\}$ も自然に決まる）．$u=1$ のとき $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォーク，$u=0$ のとき $\mathbb{Z}$ 上の self-avoiding walk に対応する．任意の $u \in (0,1]$ に対して $\Phi_1 = \Phi_{1,u}$ は §5.2 の冒頭の条件 2 を満たすので，§5 の全ての結果が成り立つ．対応する確率連鎖 $W_k = W_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, の漸近的性質の鍵になる指数 $\nu = \nu_u$ は

$$x_{c,u} = \frac{1}{4u^2}(\sqrt{1+8u^2}-1), \quad \lambda_u = \frac{\partial \Phi_{1,u}}{\partial x}(x_{c,u}) = \frac{2}{x_{u,c}} = \sqrt{1+8u^2}+1,$$
$$\nu_u = \frac{\log 2}{\log \lambda_u}, \tag{5.65}$$

によって与えられる．ν_u が変位の指数（定理 5.20）や一般化された重複対数の法則（定理 5.17）の指数を与えることは単純ランダムウォークの場合と同様である．特に，この指数が u について連続であることに注意．すなわち，確率連鎖の族 $W_k = W_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqq u \leqq 1$, は self-avoiding walk と単純ランダムウォークを漸近的性質を定める指数 $\nu = \nu_u$ の意味で連続的に内挿する．

ν は，典型的な path の複雑さ（ぎざぎざの度合い）を定めるので，その違いは path の性格の違いを意味する．実際単純ランダムウォークと self-avoiding walk の典型的な path は全く見た目が異なる．そこで，任意の指数に対応する確率連鎖があるかどうかは自然な問題である．単純ランダムウォーク $(\nu = \nu_1 = 1/2)$ と self-avoiding walk $(\nu_0 = 1)$ の指数を連続的に内挿するモデルはこれまで知られていなかったが，くりこみ群の描像からは以上のように自然に発見できる．

Path の集合に制約をおかない単純ランダムウォークと一度通った点に全く戻らない self-avoiding walk を内挿していることから，$0 < u < 1$ では，典型的な path は一度通った点に戻りにくくなっていることが想像できる．この意味で，得られた確率連鎖の族 $W_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqq u \leqq 1$, を self-repelling

walk と呼ぶことにする．Self-repelling walk は連続極限をとることで対応する連続時間の確率過程を構成することができて，以上に対応する詳細な性質が知られている [14]．なお，パラメータ u は $u > 1$ にも外挿できて，やはり §5 の全ての結果が成り立つので，対応する確率連鎖が存在する．当然，少なくとも指数 ν の意味で self-attractive な傾向を持っている．

得られた確率連鎖は過去の履歴によるのでマルコフ性を持たない．くりこみ群の方法は第 I 部の方法とは異なり，マルコフ性に依存しない方法である．

(5.63) から，$\Phi_{1,u}(z) = \dfrac{1}{u^2}\Phi_{1,1}(uz)$ を得るので，一般に

$$\Phi_{n,u}(z) = \frac{1}{u}\overbrace{\left(\frac{1}{u}\Phi_{1,1}\right) \circ \cdots \circ \left(\frac{1}{u}\Phi_{1,1}\right)}^{n}(uz)$$

を得る．このように，くりこみ群で書いた定義 (5.63), (5.64) は単純ランダムウォークに似ている．しかし，これから (5.7) の $\{b_n(w)\}$ をあらわに書き下すのは難しい．Path w が折れ曲がるごとに u の因子が重みを減らすようにかかる (self-repelling) が，折れ曲がった点の位置によって u のべきが異なるのでその関数形は極めて複雑になる．くりこみ群によらないでこのモデルを見つけるのは容易ではない．

6章

Sierpiński gasket 上の self-avoiding path

自分自身の軌跡が交わることを禁止した self-avoiding path については，低次元の格子空間では単純ランダムウォークと比較すると極めて弱い性質しか知られていないことを $\mathbb{Z}^n$ の場合に第 I 部 §4 で説明した．Self-avoiding path には単純ランダムウォークと違ってマルコフ性がないからである．以下で紹介する d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path についても事情は同様である．具体的に §6.1 で導入するが，Sierpiński gasket（シルピンスキーガスケット）と呼ばれる有名なフラクタルの単位構造より細かい構造を消し去った pre-Sierpiński gasket というフラクタル格子がある．d 次元 pre-gasket とはその一般化であって，$d = 2$ の場合が pre-Sierpiński gasket である．

d 次元 pre-gasket 上でくりこみ群の描像が自然な出発点であることは単純ランダムウォークと self-avoiding path で共通だが，前者はマルコフ性や関連する調和関数などの解析的手法が，多少見かけを変えながらも図形の次元や形状によらずに適用可能である（pre-Sierpiński gasket の場合にごく一端を §7 に紹介する）のに対して，後者は $\mathbb{Z}^n$ の場合と同様にマルコフ性や関連する手法は使えない．しかも，以下で紹介する Sierpiński gasket および d 次元 pre-gasket は $\mathbb{Z}^n$ にたとえれば低次元の（ある意味で $1 < n < 2$ に相当する）格子空間なので，単純ランダムウォークと self-avoiding path は全く違う漸近的性質を示すことが想像され，また，図形や次元によっても著しく異なることが予想される．実際，この節 §6 で示す通り分かっている場合については漸近的性質の複雑な次元依存性がみられる．

くりこみ群の視点からは，§5 で紹介した確率連鎖がくりこみ群の固定点直上という自明な軌道に対応していたのに対して，本節で扱う対象に対応する初期値 (canonical surface) は固定点から離れているため，くりこみ群の大局的な軌道解析の例になる．d を決めるごとに d 次元 pre-gasket 上の

self-avoiding path を具体的に調べることは原理的に可能だが，d によらない，すなわち，個々の図形を越えたくりこみ群の大局的な軌道解析の一般論は見いだされていない．くりこみ群が解析手段として意味を持つならば何らかの一般論があるべきだが，他方で，低次元図形上の self-avoiding path は次元ごとに（図形ごとに）その漸近的性質が大きく違うことも予想されているので，図形によらない一般論が簡単でないとしても不思議はない．

以上のように，d 次元 pre-gasket 上の self-avoiding path という問題はくりこみ群の重要な問題を内包する基礎的な問題として，また既存の解析方法が使えない状況でくりこみ群の解析手段としての力を試す場として，検討する価値があると考える．以下 [21, 23, 24, 27, 29, 30] に基づいて紹介する．

6.1 定義と主結果

広い意味での自己相似な図形を一般にフラクタルと呼ぶ．以下では話を簡単にするために Sierpiński gasket（およびその一般化である d 次元 gasket）と呼ばれる典型的な図形に話を限る．

フラクタル上で考える理由を確認しておく．§5 でくりこみ群の「精度のスケール変換」として decimation を考えた．Decimation が有効であるためには，G_{n+1} 上の path の点列のうち G_n の点だけ残したものが G_n 上の path になる必要がある．§5 でみた通り直線上 ($G_0 = \mathbb{Z}$) の path の場合は decimation の有効性が明らかだが，どんな図形でも無条件に有効というわけではない．たとえば $\mathbb{Z}^2$ 上の path を考えるために，$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^2$ とおいてみる（図 6.1）と，G_{n+1} 上の path で，対応する G_{n+1} の点列から G_n の点だけ残したものが G_n 上の path にならない例が作れる．これは decimation という技法の特性ではなく図形の特徴に由来する本質的な困難である．

一般に $\mathbb{Z}^n$ 上の path を考えるとき，decimation は $n = 1$ の場合のみ有効で，$n \geqq 2$ では有効ではない．他方，非マルコフ連鎖の一つの典型例として self-avoiding path を考えようとすると，$\mathbb{Z}$ 上では自明過ぎて，くりこみ群の解析の意味が見えない．そこで，decimation が有効（もう少し正確に言うとくりこみ群が有限次元）になり，かつ，self-avoiding path が自明でないような図形の典型として Sierpiński gasket およびその拡張を選ぶ．モデルとして

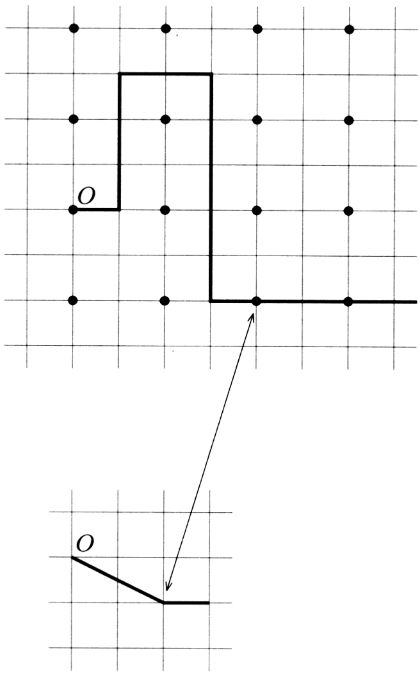


図 6.1

はできるだけ簡単にしつつ，マルコフ性のような強力な手法が使えない対象を選ぶことでくりこみ群を厳密さを損なわずに理解することが目標である．

フラクタル上で考える理由はもう一つの側面がある．$\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークなどの対象では格子の（離散）並進対称性に基づくフーリエ級数展開（運動量表示）がもう一つの強力な解析手段であった．フラクタルという並進対称性のない空間上で考えることにより，フーリエ展開という解析手段をも縛ることになる．このことの意義は十分くみ尽くし得ていないが，たとえば §7 で紹介するように，pre-Sierpiński gasket 上の非等方的なランダムウォークには等方性の回復と呼ばれる空間に並進対称性がないがゆえに起こる現象が知られている．

6.1.1 Pre-Sierpiński gasket

まず Sierpiński gasket およびその格子化によるネットワークである pre-Sierpiński gasket を導入する．

（狭い意味での）図形の自己相似性とは，図形を縮小した図形をいくつか合わせて元の図形を再現できることである．一般に縮小写像の組を与えると，それらによって写された図形の和集合が元の図形に一致する，という条件から（空でない有界閉集合が一意的に定まるという意味で）フラクタル図形が定義できることが知られている [T18]．Sierpiński gasket は単位三角形の内部に複雑な構造を持つ図形である（図 6.2）が，この図形をコピー機で 50%縮小すると（スケールを半分にすると）元の図形の 1/3 の部分に重なる（重ね方は 3 通りある）．

Sierpiński gasket は次のようにして作ることもできる．1 辺の長さが 1 の三角形の周の点からなる集合を F'_0 とおく．F'_0 に，その 3 辺の中点を結んでできる 1 辺 1/2 の下向きの三角形の周の点を加えてできる，1 辺 1/2 の上向きの三角形三つからなる図形を F'_1 とおく．同様に F'_1 に 1 辺 1/4 の下向きの三角形を 3 個加えてできる，上向き三角形 9 個からなる図形を F'_2 とおく．これを繰り返して，一般に，F'_{n-1} に 1 辺 2^{-n} の下向きの三角形を 3^{n-1} 個加

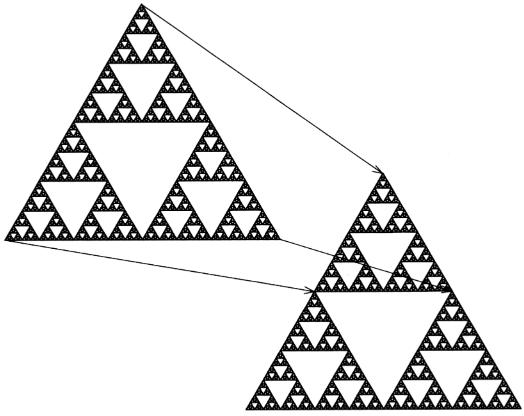
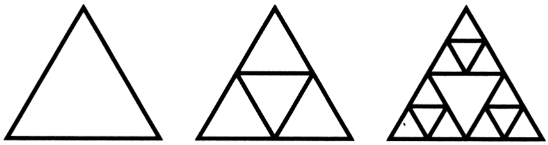


図 6.2



F'_0　　　F'_1　　　F'_2

図 6.3

えてできる図形を F'_n とおく（図 6.3）．F'_n は 1 辺 2^{-n} の上向きの三角形を 3^n 個つないでできる図形だが，$F'_0 \subset F'_1 \subset F'_2 \subset \cdots$ となっているので，その $n \to \infty$ の極限集合 $\bigcup_{n=0}^{\infty} F'_n$ がある．その $\mathbb{R}^2$ の中での閉包として Sierpiński gasket を得る（閉包をとるのは一般的に閉集合のほうが便利だから．以上の作り方だと「無理点」が抜けてしまうので閉集合にならない．本書では連続極限を扱わないので，閉包をとることは重要ではないので，フラクタルの詳しい話にはこれ以上立ち入らない）．以上の作り方は，最初に書いた，Sierpiński gasket をその部分集合に写す三つの縮小写像を単位三角形 F'_0 に逐次適用していった極限によって，三つの縮小写像の「和」についての固定点としての Sierpiński gasket を作ったということである．この作り方で分かるように，Sierpiński gasket を含めてフラクタルは一般に無限に細かい構造を持つ．これに対して，途中段階の図形 F'_n たちは 0 でない最小単位の構造（線分の長さの最小単位）がある．これらの図形を，（業界用語で申し訳ないが）フラクタル前駆図形という気持ちでプレフラクタルと呼ぶことにする．Sierpiński gasket に戻れば F'_n たちは pre-Sierpiński gasket ということになる．

フラクタルというときは無限に細かい構造に注目するが，本書のように pre-Sierpiński gasket 上の path を考えるときは，1 歩の歩幅を 1 にするのが自然だろう．そこで上で定義した F'_n に対して $F_n = 2^n F'_n$ とおく．ここで（今までと同様に）$A \subset \mathbb{R}^2$ に対して $2^n A = \{2^n x \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ と書いた．

必要ならば $\mathbb{R}^2$ の中で平行移動することで F_n の外側の 3 個の頂点の一つを $\mathbb{R}^2$ の原点 O にとることができる．このとき $F'_0 \subset F'_1 \subset F'_2 \subset \cdots$ だったの

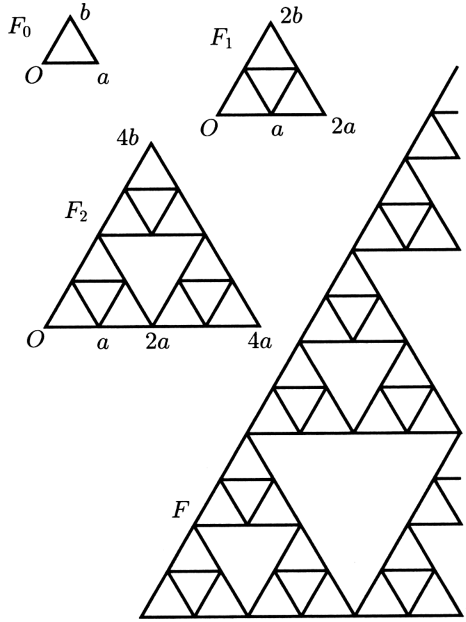


図 6.4

で，$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ となるから，極限 $F = \bigcup_n F_n$ が存在する（図 6.4）．断りなく単に pre-Sierpiński gasket と呼ぶときはこの無限図形 F を指すことにする．

F'_n の作り方から，F_n は F_{n-1} と合同な図形を 3 個集めてつないで一つの三角形にした図形，ということもできる．すなわち，$F_0 = F'_0$ の頂点を $O = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくとき，

$$F_n = F_{n-1} \cup (F_{n-1} + 2^{n-1}v_1) \cup (F_{n-1} + 2^{n-1}v_2), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6.1}$$

となる．ここで $A \subset \mathbb{R}^2$ と $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $A + x = \{y + x \mid y \in A\}$ と書いた．また，いつものように，$x \in \mathbb{R}^2$ に対して x の定数倍は線形空間としての定数倍の意味である．すなわち，F_n のもっとも外側の三つの頂点は O, $2^n v_1$, $2^n v_2$ である．

F 上の path を考えるときは，$\mathbb{R}^2$ の点の集合としてよりもネットワークとしての構造が重要である．F_n の中の単位三角形を構成する単位線分を（用語が悪いが）F_n の辺と呼び，F_n の辺を全て集めた集合を B_n とおく．また，F_n の中の単位三角形の頂点を（これも用語が悪いが）F_n の頂点と呼び，F_n の頂点を全て集めた集合を G_n とおく．そして F_n を頂点の集合 G_n と辺の集合 B_n で定義されるネットワークとみなして，記号の節約のため，$F_n = (G_n, B_n)$ とおくことにする．$G = \bigcup_n G_n$, $B = \bigcup_n B_n$, とおけば pre-Sierpiński gasket F は G を頂点の集合，B を辺の集合とするネットワーク $F = (G, B)$ とみることができるので，以後 F という記号はネットワークの意味にも流用することにする．

6.1.2　Pre-d 次元 gasket

図 6.4 の作り方を拡張して pre-Sierpiński gasket を一般次元化した図形（高次元ガスケット）を定義する（図 6.5）．

d を 2 以上の自然数とする．正三角形や正三角錐のように，$\mathbb{R}^d$ の中の $d+1$ 個の点がどの 2 点も距離 1 だけ離れているとき，これらの全ての点の組を結

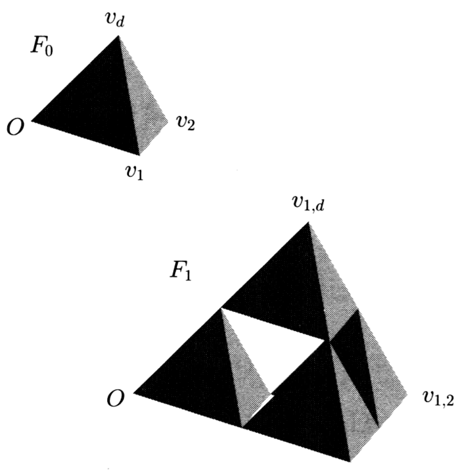


図 6.5

んでできる図形を d 次元単体という．F_0 を d 次元単体で一つの頂点が $\mathbb{R}^d$ の原点 O であるものとし，残りの頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_d$ とする．(6.1) と同様に F_{n-1} と合同な図形を $d+1$ 個集めて 1 辺の長さが 2^n の d 次元単体に収まるようにつないで F_n とすることで帰納的に F_n が定義できる：

$$F_n = F_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{d} (F_{n-1} + 2^{n-1} v_i), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

必ずしも一般的な用語ではないが，

$$F = \bigcup_n F_n \tag{6.3}$$

を d 次元 pre-Sierpiński gasket と呼ぶことにする．また，n 次元正方格子を $\mathbb{Z}^n$ と略記するのと同様に，以下では d 次元 pre-gasket を本書だけの記号で dSG と略記することにする．

dSG の場合も pre-Sierpiński gasket と同様に，path を考えるときはネットワークとしての構造しか見ない．そこで，今までと同様に F を頂点たちの集合 G と F の単位長さの辺の集合 B の対 $F = (G, B)$ ともみることにする．あとの便宜のため F_n のもっとも外側の頂点を $v_{n,0} = O$ および $v_{n,i} = 2^n v_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, d$, とも書くことにする．

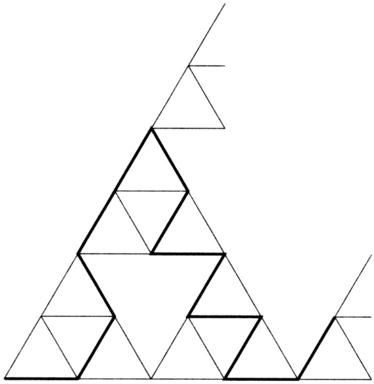
6.1.3 Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path

$\mathbb{Z}^n$ の場合（第 I 部の §3.2, §4）と同様に，pre-d 次元 gasket 上の path と self-avoiding path の集合を定義する．$d \geqq 2$ を固定して pre-d 次元 gasket を $F = (G, B)$ とする．出発点が原点 O で，F の頂点 G をたどる k 歩の path を全て集めた集合を $\tilde{\Omega}_k$ とおき，さらに，そのうちで self-avoiding なものを全て集めた集合を $\tilde{\Omega}'_k$ とおく．

すなわち，$w \in \tilde{\Omega}_k$ であるとは，写像 $w:\ \{0, 1, 2, \ldots, k\} \to G$ であって，$w(0) = O$ および，1 歩 1 歩が F の辺であること，

$$\overline{w(i)w(i+1)} \in B, \ i = 0, 2, \ldots, k-1,$$

を言う．今までと同様に，写像の記号を使う代わりに $w = (w(0), w(1), \ldots, w(k))$ のようにも書く．長さ無限の path も考えて，その集合を $\tilde{\Omega}$ とする．F



$w \in W_0$
$L(w) = 13$

図 6.6

上の path $w \in \tilde{\Omega} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_k$ に対してその長さを $L(w)$ と書くことも $\mathbb{Z}^n$ のときと同様とする．また，$w \in \tilde{\Omega}'_k$ であるとは，第 I 部 §4 (4.1) と同様に，$w \in \tilde{\Omega}_k$ であって，self-avoiding 性

$$w(i) \neq w(j),\ 0 \leqq i < j \leqq k,$$

を満たすものを言う．無限長の場合も同様に $\tilde{\Omega}'$ を無限長の self-avoiding path の集合とし，有限長または無限長の self-avoiding path の集合を

$$\Omega_0 = \tilde{\Omega}' \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\Omega}'_k$$

とおく（図 6.6）．

6.1.4　主　　結　　果

Pre-Sierpiński gasket や d 次元 pre-gasket (dSG) 上の self-avoiding path の漸近的性質（長さが長いときの振る舞い）を，§5 の $\mathbb{Z}$ 上の path の場合にならってくりこみ群を用いて調べる．§5.3.1 で触れたように，self-avoiding path 上の確率測度の与え方に 2 通りの方法がある．第 1 の方法は，§5.3.2 の

ように確率連鎖を構成すること，すなわち，無限長の self-avoiding path の上に確率測度を定義する方法である．この場合確率測度としてはくりこみ群から自然に定まるものを選ぶのがもっとも単純である．実際，pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path についてこの方法を実行することは可能である．ただし，self-avoiding path の場合は，袋小路に入るような path は無限にのばせないので除外する（確率 0 とする）必要があり，また，残った self-avoiding path の上の確率は（くりこみ群の立場からは自然でも）図 6.7 のように path の形に複雑に依存する．なお図 6.7 は後述の定理 6.26 の直前の (6.42) で定義される path 上の分布 $\mu_{\mathbf{x},n,(1)}$ においてパラメータ $\mathbf{x}$ を命題 6.5 の $\mathbf{x}_c$（くりこみ群の固定点）においたものを §5.3.2 の P_n に対応させたときに §5.3.2 の方法で構成される確率連鎖に基づいて計算したものである（$\mathbb{Z}$ 上ではなく pre-Sierpiński gasket 上で考えるのでよぶんな考察が必要になるが詳しくは [22] を参照していただきたい）．ここでは第 I 部 §4 にならって第 2 の方法をとる．すなわち，長さ k ごとに self-avoiding な path 全てを集め

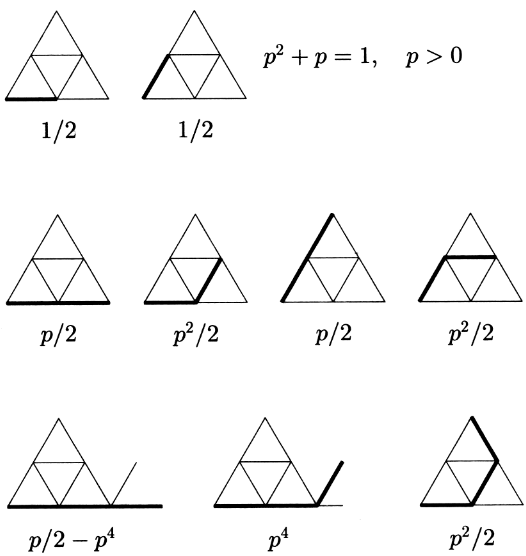


図 6.7

た集合 $\tilde{\Omega}'_k$ 上に一様分布を与えて，各 k ごとにこの一様分布についての性質（すなわち，path に関する単純平均）を考えてその $k \to \infty$ での漸近的性質を調べる．各 k ごとに $\tilde{\Omega}'_k$ は有限集合なので，一様分布は有限和と総本数による割算で計算できる．この方法では 1 本の path を無限にのばすことはできないので，重複対数の法則のように 1 本ごとに path の様子をながめる議論はできない．以下では変位の指数に注目する．

どちらの方法もくりこみ群そのものは同じである．したがって，path の漸近的性質を定める指数 ν は両者で等しくなる．出発点となる確率測度が違っても漸近的性質を定める指数が等しくなるというのはくりこみ群の理論で普遍性と呼ばれる重要な性質である（第 I 部 §4.2）．しかし，調べるべきことの中には両者で大きく違う部分がある．前者の方法は，確率測度を最初からくりこみ群にとって自然なものにとるので，くりこみ群の固定点付近だけを調べればよいが，一様分布への翻訳は，くりこみ群の固定点と一様分布に対応するパラメータ空間の点をくりこみ群でつなぐ，というくりこみ群の大局的な軌道解析が必要になる．その議論の紹介がこの節 §6 の目的である．また，たとえば袋小路に入る path はくりこみ群には入らないが，これらが漸近的性質には効かないことを図形的な方法（反射原理）で押さえる必要がある．

dSG 上の self-avoiding path の変位の指数については，$d = 2, 3$ の場合しか解決していない．

定理 6.1 ([23, 24, 27])　$\lambda_2 = \dfrac{1}{2}(7 - \sqrt{5})$ に対して $\nu = \nu_2 = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_2}$ $(= 0.7986\cdots)$ とおくと，pre-Sierpiński gasket 上の k 歩の self-avoiding path の集合 $\tilde{\Omega}'_k$ 上の一様分布に関する期待値を E_k と書くとき，変位の指数は次の意味で ν である．

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_k[\,|w(k)|^s\,] = s\,\nu, \quad s \geqq 0\,.$$

同様に，$2 < \lambda_3 < 3$ なる定数が存在して，$\nu = \nu_3 = \dfrac{\log 2}{\log \lambda_3}$ $(0.6740\cdots)$ とおくと，3SG 上の k 歩の self-avoiding path の集合 $\tilde{\Omega}'_k$ 上の一様分布に関する期待値を E_k と書くとき，変位の指数は上と同じ意味で ν である．　◇

注 6.2 (i) ν_d と数値的に比較すべきは dSG 上の単純ランダムウォークの指数であるが，それは $\mathbb{Z}^n$ の場合とは異なっていて，$\nu(SRW)_d = \dfrac{\log 2}{\log(d+3)}$ ($\nu_2 = 0.430676\cdots$, $\nu_3 = 0.38685\cdots$) である．この結果の導出は §7.1, §7.2 で概説する．

(ii) λ_3 は具体的に分かっている [24]．11 次多項式

$$\begin{aligned} g(x) = & -121 + 121x + 605x^2 + 813x^3 - 1432x^4 - 3656x^5 - 4424x^6 \\ & + 1680x^7 + 9468x^8 + 11788x^9 + 6692x^{10} + 1804x^{11} \end{aligned}$$

に対して $g(x) = x$ を満たす正数はただ一つ存在する．それを x_c として，y_c を

$$y_c = -\frac{33 - 66x_c - 99{x_c}^2 + 88{x_c}^3 + 176{x_c}^4 + 88{x_c}^5 + 10{x_c}^6}{2{x_c}^2(-159 + 132x_c + 264{x_c}^2 + 196{x_c}^3)}$$

で定義するとき，

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & \frac{1}{2}((8x_c^3 + 6x_c^2 + 2x_c + 12x_c^2 y_c + 12x_c y_c^2) + (4x_c^3 + 88y_c^3) \\ & + \{((8x_c^3 + 6x_c^2 + 2x_c + 12x_c^2 y_c + 12x_c y_c^2) - (4x_c^3 + 88y_c^3))^2 \\ & + 4(4x_c^3 + 12x_c^2 y_c)^2\}^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

で与えられる．

λ_d, $d = 2, 3$, は §6.2 で紹介する self-avoiding path のくりこみ群のある固定点（self-avoiding 固定点）での微分写像行列の最大固有値である．一般に dSG 上の self-avoiding path のくりこみ写像は（有限なネットワーク上で可能な self-avoiding path は有限本なので）多項式になるから，その固定点における微分写像行列の最大固有値は整数係数代数方程式の根になる．したがって，変位の指数は全ての d に対して（§6.2 の理論の仮定を満たすならば）同様の性質を満たす．

(iii) $d = 2, 3$ の結果からすでに分かるように，単純ランダムウォークと self-avoiding path の変位の指数は全く違う値であり，しかも，簡単な関係もない．$\mathbb{Z}^n$ 上では $n > 4$ では両者の指数が一致することから，$n < 4$

でも簡単な関係があると期待したくなるのが人情かもしれないが，問題はそんなに浅くはないことを定理 6.1 の結果は示唆している． ◇

§5 では，くりこみ群そのものの解析 (§5.2) と，その結果を元の問題，すなわち path の漸近的性質，へ適用すること (§5.3, §5.4, §5.5) という二つの部分に問題を分けた．dSG 上の self-avoiding path の問題をこのように分けたとき，定理 6.1 が $d \geqq 4$ で未解決というのは，前者の，くりこみ群の軌道解析が未解決という意味である．後者の，くりこみ群解析の結果を元の問題に適用する部分は一般論が分かっている [29, 30]．この結果を述べるためには，§5.1 に対応して，dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群の定式化を必要とする．次節 §6.2 では，まず，図形をイメージしやすい pre-Sierpiński gasket の場合にこれを実行し (§6.2.1)，その次に少し抽象的な言葉遣いに直して dSG へ一般化する (§6.2.3)．§6.3 で一般の dSG の上の self-avoiding path のくりこみ群について何が証明できれば変位の指数に関して定理 6.1 のような結果が得られるか，についての主結果を紹介する．その枠組みに基づく定理 6.1 の $d = 2$ の場合の証明をこの節 §6 の最後の小節 §6.3.4 で完成する．

6.2 くりこみ群

6.2.1 Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群

$\mathbb{Z}$ 上の path のくりこみ群 (§5.1.2) の場合と同様に F_n 上の「自然な」self-avoiding path の集合の列（仮に $\Omega_n \subset \Omega_0$ としよう）を選び，(5.7) にならって，長さ L の母関数

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \Omega_n} z^{L(w)} \quad (?)$$

を定義して，命題 5.3 にならって，その n についての再帰式を考えたい（なお，(5.7) には $b_n(w)$ という因子があったが，ここでは self-avoiding な path に和を限っているので，(5.7) との対応で言えば，w が self-avoiding ならば $b_n(w) = 1$，そうでなければ $b_n(w) = 0$ という因子が入っているのと同じことである）．しかし，§5 と違って 1 変数だけでは n についての再帰式が閉じないことがすぐに分かる．長さ（総歩数）に対応する 1 変数だけではなく，self-avoiding path が一つの単位三角形を通る通り方を分類して対応する 2 変

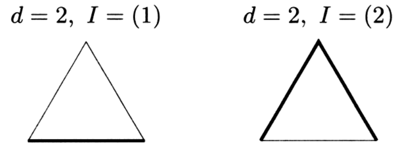


図 6.8

数（2 次元パラメータ空間）で母関数を考える必要がある．

Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path が F の一つの単位正三角形を通る通り方は 1 歩で通り抜けるか 2 歩で通り抜けるかの 2 通りある（図 6.8）．そこで，self-avoiding path $w \in \Omega_0$ に対して，w が通る単位三角形のうち 1 歩で通ったものの個数を $s_{(1)}(w)$，2 歩で通ったものの個数を $s_{(2)}(w)$，とおく．まとめて書くときは，添字の集合 $\mathcal{I}_2 = \{(1),(2)\}$ を用意して

$$s_I(w),\ I \in \mathcal{I}_2\,, \tag{6.4}$$

と書くことにする（$(1),(2)$ の代わりに $1,2$ と書いても不都合はないが，§6.2.3 で dSG に一般化するときに整合するように，最初からよぶんな括弧をつけておく）．Path の長さ（総歩数）との関係は

$$L = s_{(1)} + 2s_{(2)} = \sum_{I\in\mathcal{I}_2} |I| s_I\,. \tag{6.5}$$

ここで，（まとめて書くときのために）添字 I に対応する単位三角形の中での path の歩数を $|I|$ と書いた．すなわち，$|(1)| = 1$, $|(2)| = 2$ である．

パラメータ空間を 2 次元としたのに対応して，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して F_n 上の self-avoiding path の集合も 2 種類に分類する必要がある．§5.1.1 の類推から，くりこみ群 (decimation) にとって自然な path は，原点 O から F_n のいちばん外側の頂点 $2^n v_1$ までの self-avoiding path であり，残りの外側の頂点 $2^n v_2$ を通るか通らないかで分類するのが適当である（図 6.9）．式で書くと次のようになる．$n = 0,1,2,\ldots$ に対して

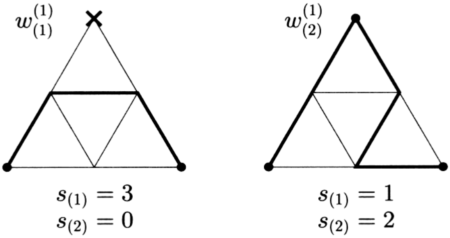


図 6.9

$$\Omega^{(n)}_{(1)} = \{w \in \Omega_0 \mid w(L(w)) = 2^n v_1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \in B_n,\ w(i) \neq 2^n v_2,$$
$$i = 0, 1, \ldots, w(L) - 1\},$$
$$\Omega^{(n)}_{(2)} = \{w \in \Omega_0 \mid w(L(w)) = 2^n v_1,\ \overline{w(i)w(i+1)} \in B_n,$$
$$i = 0, 1, \ldots, w(L) - 1,\ \exists i;\ w(i) = 2^n v_2\}. \tag{6.6}$$

いずれも有限集合なのであらわに数え上げることができる．$n = 1$ の場合，すなわち $\Omega^{(1)}_I$, $I \in \mathcal{I}_2$, はくりこみ群の写像を作るのに用いるので図 6.10 に図示しておく．

§5.1.1 と同様の手順で，次に decimation Q_n：$\Omega^{(n+1)}_I \to \Omega^{(n)}_I$ を $I \in \mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, に対して定義する．§5.1.1 では，decimation が path の細かい構造を取り除いたり付け加えたりする側面を強調するために，n が大きくなるほど単位長さを小さくする記述をした．この記述だとくりこみ群を定義する間は記述が簡単で，また，たとえば連続極限を考える場合にはこのほうが分かりやすいが，本書では path の歩幅を 1 としているので，n とともに単位長さを変えてくりこみ群を定義すると §5.3 に頻出する 2^n のようにあとで 1 歩の長さを 1 に戻すためにあちこちに定数をかけないといけなくなる．この節では最初から単位長さを 1 に保ったまま，説明は §5.1.1 の類推で進めることにする．こうすると最初のうち因子 2 がついてまわるが §5.1.1 のときと同様にこれらの因子は重要ではない．

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I \in \mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$ を選び，$2F_n$（単位長さ 2，1 辺 2^{n+1} の F_n と相似な有限 pre-Sierpiński gasket）の頂点の集合を $2G_n$ と書く．§5.1.1 の

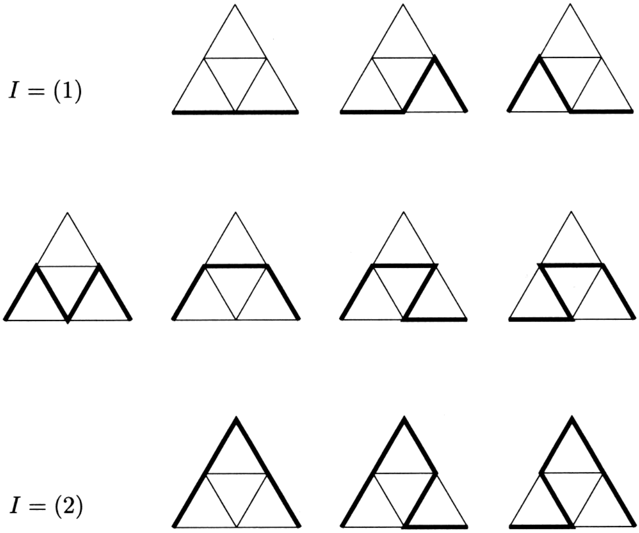


図 6.10

(5.1) の類推で，G_{n+1} 上の self-avoiding path $w \in \Omega_I^{(n+1)}$ に対して $2G_n$ を通る時刻の列 $T_{n,i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, を

$$T_{n,0}(w) = 0,$$

$$T_{n,i+1}(w) = \min\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in 2G_n\}, \quad (\text{右辺が存在するとき,}) \tag{6.7}$$

によって定義する (Self-avoiding path しか考えないので (5.1) にあった $\{w(T_{n,i}(w))\}$ を定義から除いたが，本質的に同一の定義である)．右辺が存在する i に対してのみ $T_{n,i}$ を定義し，最後の i を $L(Q_n w)$ とおく．そして，(5.2) にならって

$$(Q_n w)(i) = 2^{-1} w(T_{n,i}(w)), \ i = 0, 1, 2, \ldots, L(Q_n w), \tag{6.8}$$

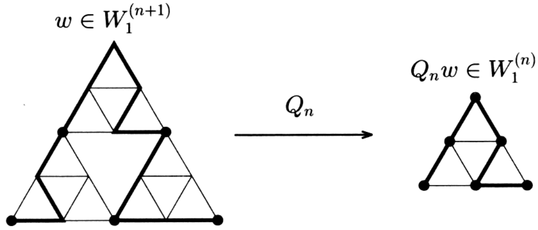


図 6.11

とおいて，decimation $Q_n: \Omega_I^{(n+1)} \to \Omega_I^{(n)}$ を定義する（図 6.11）．$L(Q_n w)$ は G_n 上の path $Q_n w \in \Omega_I^{(n)}$ の長さになる．

§5.1.1 と同様に，Q_n の逆操作 Q_n^{-1} は，$\Omega_I^{(n)}$ の path の 1 歩 1 歩に細かい構造を付け加えた $\Omega_I^{(n+1)}$ の path の集合を与える．Q_n が細かい構造を消し去るのでその逆操作は $Q_n w$ の j 歩目の 1 歩を w の $T_{n,j}(w) - T_{n,j-1}(w)$ 歩に細分する．

§5.1.1 と異なるのは，$Q_n w$ の各 1 歩は Q_n^{-1} によってとりうる微細構造が全て等しいわけではないという点である．図 6.12 のように，path $Q_n w$ が 1

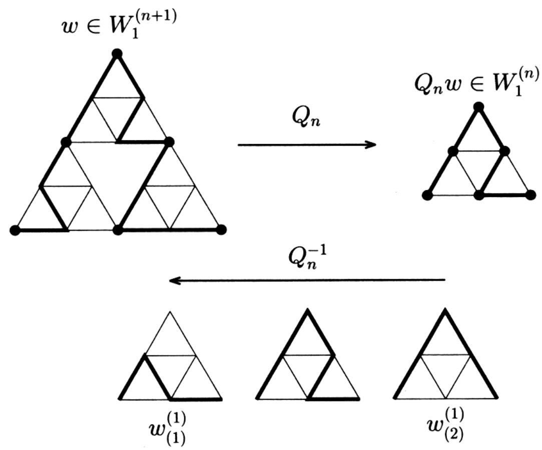


図 6.12

歩で通り抜ける単位三角形に付け加えうる微細構造は $\Omega^{(1)}_{(1)}$ の path であり，2 歩で通る単位三角形に付け加えうる微細構造は $\Omega^{(1)}_{(2)}$ の path である（ここに path が各単位三角形をどう通るかについての分類，すなわち s_I の定義，と path の集合の分解，すなわち $\Omega_I^{(n)}$ の定義，が対応する理由がある）．図 6.10 で見たように，可能な path は両者で異なる．Self-avoiding という条件を課しているためである．

以上の考察から逆に，$w' \in \Omega_I^{(n)}$ の path に対して，w' が 1 歩で通る単位三角形が $s_{(1)}(w')$ 個，w' が 2 歩で通る単位三角形が $s_{(2)}(w')$ 個，それぞれあるが，前者の単位三角形内の w' の 1 歩をそれぞれ $\Omega^{(1)}_{(1)}$ の任意の path で置き換え，後者の単位三角形内の w' の 2 歩をそれぞれ $\Omega^{(1)}_{(2)}$ の任意の path で置き換えると，$\Omega_I^{(n+1)}$ の path を得る．この意味で (5.9) と同様の 1 対 1 対応がある．

Decimation（§5.1.1 に対応する部分）が終わったので，次は §5.1.2 に従ってくりこみ群を求める．

ここで §5.1.2 と異なる点は，くりこみ群が作用するパラメータ空間が 1 次元ではない（扱うべき母関数が 1 変数関数ではない）ことである．最終的に求めたいのは長い path がどのような振る舞いをとるか，ということなので，端点を固定した path の集合 $\Omega_I^{(n)}$ に対しては，path の長さ $L = s_{(1)} + 2s_{(2)}$ の分布に興味がある．しかし，decimation の定義から明らかに，再帰式に対して自然な変数は，

$$\mathbf{s} = (s_{(I)},\ I \in \mathcal{I}_2) = (s_{(1)}, s_{(2)})$$

という二つの変数の組である．したがって，その結合母関数は 2 変数関数である．他方，各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して結合母関数は二つの path 集合の組 $(\Omega_I^{(n)},\ I \in \mathcal{I}_2) = (\Omega^{(n)}_{(1)}, \Omega^{(n)}_{(2)})$ に対してそれぞれ定義されるので，2 成分関数である．それを

$$\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_2) = (X_{n,(1)}, X_{n,(2)}) :\ \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2}$$

と書く．すなわち $n \in \mathbb{Z}_+$ と $I \in \mathcal{I}_2$ に対して

$$X_{n,I}(\mathbf{z}) = \sum_{w\in\Omega_I^{(n)}} \prod_{J\in\mathcal{I}_2} z_J^{s_J(w)} = \sum_{w\in\Omega_I^{(n)}} z_{(1)}^{s_{(1)}(w)} z_{(2)}^{s_{(2)}(w)}, \quad \mathbf{z} = (z_{(1)}, z_{(2)}) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_2}, \tag{6.9}$$

である（0^0 は 1 の略記と理解する）．Self-avoiding path の特徴として，右辺は有限和なので $X_{n,I}$ は $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_2} = \mathbb{C}^2$ 全体で定義されている．

命題 6.3 (Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群)

(6.9) で定義された $\mathbf{X}_n = (X_{n,(1)}, X_{n,(2)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, は次の漸化式で定まる．

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ &\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

ここで 2 変数 2 成分関数 $\mathbf{\Phi}$ は

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}) = \mathbf{X}_1$$

であって，具体的には次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &\Phi_{(1)}(\mathbf{z}) = X_{1,(1)}(\mathbf{z}) = (z_1 + z_2)^2 + z_1^2(z_1 + 2z_2), \\ &\Phi_{(2)}(\mathbf{z}) = X_{1,(2)}(\mathbf{z}) = z_1 z_2 (z_1 + 2z_2), \\ &\qquad \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6.11}$$

◇

注 6.4　注 5.4 に書いた通り，たとえば $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \circ \mathbf{\Phi}$ が証明できれば

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \circ \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{\Phi} \circ \cdots \circ \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{X}_n$$

を得る．再帰式 (6.10) が定める ${\mathbb{R}_+}^2$ 上の力学系を pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群と呼ぶ．　◇

証明　(6.11) は図 6.10 からすぐ読みとれるので，(6.10) の再帰式を証明すればよい．

(6.8) の下で考察したように，$w \in \Omega_I^{(n+1)}$ に対して，$Q_n w \in \Omega^{(n)}$ とそれが通る各単位三角形の通り方に応じた path 断片の組，すなわち，$\Omega_{(1)}^{(1)}$ また

は $\Omega^{(1)}_{(2)}$ の path たちの組は w と 1 対 1 に対応する．この対応を §5.1.2 における 1 対 1 対応 (5.9) の代わりに用いることで，$X_{n+1,I}(\mathbf{z})$ の定義式 ((6.9) で n を $n+1$ に置き換えた式) の $w \in \Omega_I^{(n+1)}$ に関する和を $w' = Q_n w \in \Omega_I^{(n)}$ についての和でまとめなおすことができる．Path w' が通る単位三角形は $s(w) = s_{(1)}(w) + s_{(2)}(w)$ 個あるが，順に (1) 型（1 歩）で通るか (2) 型（2 歩）で通るかを添字

$$J_1(w'), J_2(w'), \ldots, J_{s(w')}(w'),$$

で表すことにして命題 5.3 と類似の変形を行うと，

$$\begin{aligned}
X_{n+1,I}(\mathbf{z}) &= \sum_{w\in\Omega_I^{(n+1)}} z_{(1)}^{s_{(1)}(w)} z_{(2)}^{s_{(2)}(w)} \\
&= \sum_{w'\in\Omega_I^{(n)}} \sum_{w\in\Omega_I^{(n+1)};\, Q_n(w)=w'} z_{(1)}^{s_{(1)}(w)} z_{(2)}^{s_{(2)}(w)} \\
&= \sum_{w'\in\Omega_I^{(n)}} \sum_{\tilde{w}_1\in\Omega^{(1)}_{J_1(w')}} z_{(1)}^{s_{(1)}(\tilde{w}_1)} z_{(2)}^{s_{(2)}(\tilde{w}_1)} \\
&\qquad \times \cdots \times \sum_{\tilde{w}_{s(w')}\in\Omega^{(1)}_{J_{s(w')}(w')}} z_{(1)}^{s_{(1)}(\tilde{w}_{s(w')})} z_{(2)}^{s_{(2)}(\tilde{w}_{s(w')})} \\
&= \sum_{w'\in\Omega_I^{(n)}} \left\{ \left(\sum_{w''\in\Omega^{(1)}_{(1)}} z_{(1)}^{s_{(1)}(w'')} z_{(2)}^{s_{(2)}(w'')} \right)^{s_{(1)}(w')} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\sum_{w''\in\Omega^{(1)}_{(2)}} z_{(1)}^{s_{(1)}(w'')} z_{(2)}^{s_{(2)}(w'')} \right)^{s_{(2)}(w')} \right\} \\
&= \sum_{w'\in\Omega_I^{(n)}} (X_{1,(1)}(\mathbf{z}))^{s_{(1)}(w')} (X_{1,(2)}(\mathbf{z}))^{s_{(2)}(w')} = X_{n,I}(\mathbf{X}_1(\mathbf{z})).
\end{aligned}$$

□

§5.1.2 の (5.18) でみたように母関数には path 集合上のある確率測度が自然に対応していて，それはくりこみ群の固定点に対応している．この意味でのくりこみ群 (6.10) の固定点に対応する確率測度，を求めておく．

命題 6.5　(6.11) で与えられる 2 成分 2 変数多項式 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}_1$ は $\mathbb{R}_+{}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にただ一つの固定点 $\mathbf{x}_c = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 0 \right)$ を持つ：

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{x}_c\,,\quad \mathbf{x}_c = (x_c, y_c) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 0 \right) \in \mathbb{R}_+{}^2 \setminus \{(0,0)\}. \tag{6.12}$$

◇

注 6.6　もちろん (6.12) と (6.10) から

$$\mathbf{X}_n(\mathbf{x}_c) = \mathbf{x}_c,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.13}$$

となる.　◇

証明　求める固定点を $\mathbf{x}_c = (x, y)$ とおくと，(6.11) から

$$(x+y)^2 + x^2(x+2y) = x \tag{6.14}$$

および

$$xy(x+2y) = y \tag{6.15}$$

を得る．$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $(x,y) \neq (0,0)$ という条件でこれを解けば固定点はただ一つ，命題の主張にあるものに限ることが分かる．　□

$n \in \mathbb{Z}_+$ をとり，命題 6.5 の $x_c = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ を用いて，各 $w \in \Omega_{(1)}^{(n)}$ に対して

$$\mathrm{P}_{n,(1)}[\,\{w\}\,] = \begin{cases} {x_c}^{s_{(1)}-1}, & s_{(2)}(w) = 0 \text{ のとき}, \\ 0, & s_{(2)}(w) \neq 0 \text{ のとき}, \end{cases} \tag{6.16}$$

とおいて定まる $\Omega_{(1)}^{(n)}$ 上の確率測度を考える．これが確率測度を定めることは，$x_c > 0$ と (6.13) を用いて得られる

$$\mathrm{P}_{n,(1)}[\,\Omega_{(1)}^{(n)}\,] = \frac{1}{x_c} \sum_{\substack{w \in \Omega_{(1)}^{(n)};\\ s_{(2)}(w)=0}} {x_c}^{s_{(1)}(w)} = \frac{1}{x_c} X_{n,(1)}(x_c, 0) = 1$$

から分かる．

ところで，$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}_1$ の固定点 $\mathbf{x}_c$ は (2)-成分が 0 なので $\Omega_{(2)}^{(n)}$ 上の確率測度を考えようとしても (6.16) のように $\dfrac{1}{x_c}$ をかけることで確率測度を得る方法は使えない．これは，path の漸近的性質を考える際は $\Omega_{(2)}^{(n)}$ の path は $\Omega_{(1)}^{(n)}$ の path に比べれば重要ではないからである，と理解するのが適当である．

固定点から少し離れた点での母関数 $X_{n,(1)}(x,0)$ が $\mathrm{P}_{n,(1)}$ のラプラス変換に対応することも §5.1.2 と同様である．ただし，§5.1.2 の場合と異なるのは，長さ L ではなく $s_{(1)}$ のラプラス変換になることである（$s_{(2)}$ が関与しないのは $\mathbf{\Phi}$ の固定点に基づく確率測度 (6.16) では $s_{(2)} = 0$ なる path しか重みを持たないから）．具体的には，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} e^{-t\,k}\mathrm{P}_{n,(1)}[\,\{w \in \Omega_{(1)}^{(n)} \mid s_{(1)}(w) = k\}\,] = \sum_{w\in\Omega_{(1)}^{(n)}} e^{-t\,s_{(1)}(w)}\mathrm{P}_{n,(1)}[\,\{w\}\,]$$
$$= \frac{1}{x_c} \sum_{\substack{w\in\Omega_{(1)}^{(n)};\\ s_{(2)}(w)=0}} (e^{-t}x_c)^{s_{(1)}} = \frac{1}{x_c} X_{n,(1)}(e^{-t}x_c, 0) \quad (6.17)$$

となる．

歩数は n とともに増大するので，§5.1.2 の (5.21) のように，平均的な増大度 λ で $s_{(1)}$ を割った量のラプラス変換を考えたほうが漸近的な性質を収束という言葉でとらえることができて便利である．(5.20) の類推でいくと $\mathbf{\Phi}$ の微分係数を考えたいところだが，$\mathbf{\Phi}$ が ${\mathbb{R}_+}^2$ 上の写像なので λ を $\mathbf{\Phi}$ のヤコビ行列

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\,\Phi_{(1)}}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial\,\Phi_{(1)}}{\partial x_{(2)}} \\ \dfrac{\partial\,\Phi_{(2)}}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial\,\Phi_{(2)}}{\partial x_{(2)}} \end{pmatrix} (\mathbf{x}_c)$$

の最大固有値にとるのが適当である．(6.11) と (6.12) を用いて実際に $\mathcal{J}$ を求めてみると

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} & 2 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\lambda = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

と求まる．これが定理 6.1 における λ_2 であることが §6.3.2, §6.3.3 で分かる．

そこで，$\mathrm{P}_{n,(1)}$ の下での $\lambda^{-n}s_{(1)}$ の分布を $\tilde{\mathrm{P}}_{n,(1)}$ とおく：

$$\tilde{\mathrm{P}}_{n,(1)}[\,\{\lambda^{-n}k\}\,] = \mathrm{P}_{n,(1)}[\,\{w \in \Omega_{(1)}^{(n)} \mid s_{(1)}(w) = k\}\,],\quad k \in \mathbb{Z}_{+},. \tag{6.18}$$

(6.17) で $t = s\lambda^{-n}$ とおけば，

$$\sum_{\xi \in \lambda^{-n}\mathbb{Z}_{+}} e^{-s\xi}\tilde{\mathrm{P}}_{n,(1)}[\,\{\xi\}\,] = \frac{1}{x_c}X_{n,(1)}(e^{-\lambda^{-n}s}x_c, 0) \tag{6.19}$$

という量を考えるのがよいと推測できる．定理 6.26 で（適当な条件の下で）この量が $n\to\infty$ で収束することを示す．

6.2.2　くりこみ群の大局的な軌道解析と canonical surface

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{+}{}^{2}$ に対して，$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, とおくと，(6.10) は

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_n),\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

を意味する．$\mathbb{R}_{+}{}^{2}$ 上の点列 $\{\mathbf{x}_n\}$ を図示すると，図 6.13 のように初期値 $\mathbf{x}$ によってその振る舞いが変わる．また，$\mathbf{\Phi}$ の固定点 $\mathbf{x}_c$ の近くでの軌道の振る舞いが (6.18) などを通して対応する確率連鎖の漸近的性質を定める．§5.1.2 の説明と比べると，ここまでは力学系が 1 次元か 2 次元かの違いだけで説明としては変わらない．

§6.2.1 でも触れたように，§5.1.2 との一つの違いは，再帰式で見る母関数が $(s_{(1)}, s_{(2)})$ という，単位三角形の通り方に依存する細かい情報に対応している点である．再帰式が閉じるために 2 次元のパラメータ空間が必要である，というのがここまでの議論だったが，path の漸近的性質という観点からは，到達距離 2^n の時点での歩数 L の分布が興味の対象であって，$(s_{(1)}, s_{(2)})$ という細かい情報はいらない（もし self-avoiding path に $\mathrm{P}_{n,(1)}$ のように固定点 $\mathbf{x}_c$ に対応する確率測度を入れるならば $s_{(1)}$ と $s_{(2)}$ を区別することになるが，この節 §6 では等しい歩数の self-avoiding path に等しい重みを与え

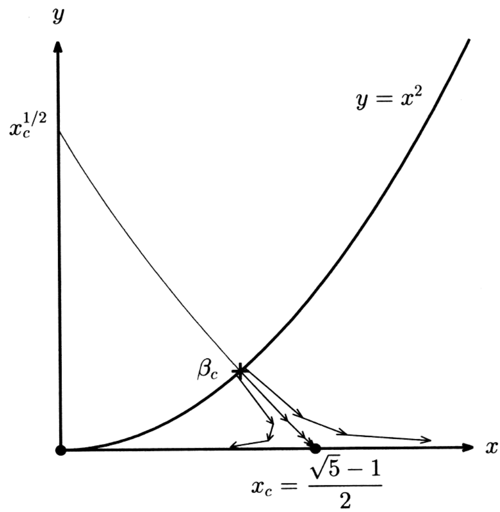


図 6.13

ているので L の分布が問題になる）．すなわち，興味の対象は，$\sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z^{L(w)}$，$I \in \{(1),(2)\}$，である．(6.5) と (6.9) によって変形すると，

$$\sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z^{L(w)} = \sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} z^{s_{(1)}(w)} z^{2s_{(2)}(w)} = X_{n,I}(z, z^2).$$

すなわち，パラメータ空間 $\mathbb{R}_+{}^2$ の中で $\{(x,x^2) \mid x \geqq 0\}$，で表される部分集合，言い換えると，曲線 $y = x^2$ の上での $X_{n,I}$ の振る舞いが path の漸近的（大きな距離や歩数での）振る舞いを決める．重要なことは，$X_{n,I}$ の漸近的性質を決める $\mathbf{\Phi}$ の固定点 $\mathbf{x}_c$ と，path の漸近的性質を決める曲線 $y = x^2$ が離れている点である（図 6.13）．このため，path の性質をくりこみ群から引き出すためには，曲線 $y = x^2$ から出発して $\mathbf{x}_c$ の近傍に向かうくりこみ群の軌道を追いかける必要がある．

このように，固定点の付近での軌道の様子だけではなく，固定点から離れた点から固定点の付近まで軌道を追いかける，という作業は一般的には容易ではない．それどころか写像によってはカオスなどの激しい振る舞いをする場

合があるので，くりこみ群という特別な範疇の力学系ではそのようなことが起きないということをきちんと言わなければならない．線形写像による力学系ならばどんなに離れた点からの軌道も固定点の近傍の軌道と同じ振る舞いなので容易である．また，何らかの意味で線形写像と比較しうる写像による場合も解析が可能であろう．たとえばフラクタル上のランダムウォークを扱う際に有効な projective metric はこの範疇に属する．しかし，Self-avoiding path に対応する写像はこのようなよい一般的性質は知られていない．くりこみ群は 1 次元（1 変数）の場合は §5 のように単純な構造をしているが，2 次元以上になると一般には力学系としての軌道の解析が自明でなくなり，くりこみ群解析の数学としての難しさが見えてくる．

くりこみ群が作用するパラメータ空間は，再帰式が閉じるように選ぶので，元の問題にとって必要なパラメータ空間よりも大きくなる．パラメータ空間の中で元の問題にとって必要な部分集合をくりこみ群の理論の用語では canonical surface（意訳すれば「自然な部分集合」というところだが英語のまま使うのが普通のようである）と言う．ここでの例では曲線 $y = x^2$ がパラメータ空間 ${\mathbb{R}_+}^2$ の中の canonical surface である．Canonical surface から固定点近傍までの軌道の大局的解析がくりこみ群解析が有効であるための重要な要素である．また，固定点に収束する軌道上の点からなる集合を critical surface，canonical surface と critical surface の交点を critical point（臨界点）と言う（図 6.13 の β_c）．　Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群の場合には固定点に収束する軌道があること，したがって臨界点のあること，を §6.3.4 で証明する．

統計力学との対応 (§A.3) では，canonical surface 上で $z = e^{-\beta}$ または $z = e^{-1/T}$ というパラメータを使い，T を温度（β を逆温度）と呼ぶ．また，（逆）温度の関数 $X_{n,I}(e^{-\beta}, e^{-2\beta})$ を分配関数と呼ぶ．この記号を用いて臨界点を $\beta = \beta_c$ $(T = T_c)$ などと書くことが多い．Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path における β_c の意味は次の結果で読みとることができる．

定理 6.7　$N(k)$ を pre-Sierpiński gasket 上の原点から出発する k 歩の self-avoiding path の本数 $N(k) = \sharp\{w \in \Omega_0 \mid L(w) = k\}$ とするとき，$\lim\limits_{k\to\infty} k^{-1}$

$\times \log N(k) = \beta_c$ が成り立つ. ◇

注 6.8 この事実を pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path の connective 定数（第 I 部 §4.1.3）が e^{β_c} である，ともいう. ◇

定理 6.1 の λ と定理 6.7 の β_c がくりこみ群解析から引き出される基本的な量である.

6.2.3 Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群

この節 §6.2.3 では §6.2.2 の定式化を一般次元の pre-gasket (dSG) に拡張する（添字が煩雑になるので，pre-Sierpiński gasket の具体的結果のみに興味がある場合はこの節 §6.2.3 をとばして §6.3 に進むこともできる）.

単位単体の通り方の分類 まず self-avoiding path の一つの単位 d 次元単体との交わり方を分類する. Self-avoiding path は一つの単位単体の中で d 歩以上は動けない（頂点の数が $d+1$ 個だから）が，$d \geqq 3$ では pre-Sierpiński gasket と違って一度通り抜けた単位単体に再度入り込むことができる. Path がある単位単体内で連続して i_1 歩進んだ後外に出てこの単体に戻らないとき，この path と単位単体の交わりを添字 $(i_1, 0, \ldots, 0)$ で表す. Path が単位単体内でまず 3 歩進み単体の外に出て何歩か動いた後この単体に戻ってきて 1 歩いて外に出て二度と戻らなかったならばこの path と単位単体の交わりを添字 $(1, 3, 0, \ldots, 0)$ で表す. 以下では，添字の順序は影響がないので 0 を除いて昇順に並べることにする. 起こりうる全ての場合を考えて，対応する添字の集合を $\mathcal{I}_d$ とおく.

もう少し詳しく言うと次のようになる. $\mathcal{T}_b$ を，dSG を構成する単位単体を全て集めたものとする. 正確には，辺に注目したもの，すなわち，B_0 を平行移動して得られる辺の集合のうち B の部分集合になっているものを $\mathcal{T}_b$ とする. また，

$$\mathcal{I}_d = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k \mid k = 1, 2, 3, \ldots,\ 0 < i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_k,\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k + k \leqq d + 1\}, \qquad (6.20)$$

とおき，その要素の個数を $f_d = \sharp\mathcal{I}_d$ とおく．このとき上記の考察から次が成り立つ．

命題 6.9　$w \in \Omega_0$ と $\Delta \in \mathcal{T}_b$ に対してその交わり

$$A = \{\overline{w(i)w(i+1)} \in \Delta \mid i = 0, 1, 2, \ldots, L(w)\}$$

が空でないならば，ある添字 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して A は

$$\Delta_I = \{\overline{Ov_1v_2\cdots v_{i_1-1}v_{i_1}}, \overline{v_{i_1+1}\cdots v_{i_1+i_2}}, \ldots, \overline{v_{i_1+\cdots+i_{k-1}+1}\cdots v_{i_1+\cdots+i_k}}\} \quad (6.21)$$

と合同である．ここで，たとえば

$$\overline{Ov_1v_2\cdots v_{i_1-1}v_{i_1}} = \overline{Ov_1}, \overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \ldots, \overline{v_{i_1-1}v_{i_1}}$$

のような略記法を用いた．　◇

例 6.10　$d = 2$:　$\mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$．空集合でない A は $\{\overline{Ov_1}\}$ または $\{\overline{Ov_1v_2}\}$ と合同である．

$d = 3$:　$\mathcal{I}_3 = \{(1), (2), (3), (1, 1)\}$．$\{\overline{Ov_1}, \overline{v_2v_3}\}$ のように，1 本の path が一つの単位単体を一度出てからもう 1 回通る可能性がある（図 6.14）．

$d = 4$:　$\mathcal{I}_4 = \{(1), (2), (3), (4), (1, 1), (1, 2)\}$．

それぞれ $f_2 = 2$, $f_3 = 4$, $f_4 = 6$ である．　◇

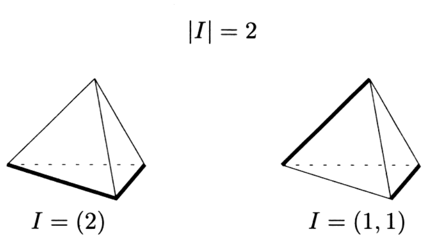


図 6.14

Path（の組）の分類 くりこみ群の作用するパラメータ空間は $\mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d}$ となる．言い換えるとパラメータ空間の各成分と添字が対応する．そこで，pre-Sierpiński gasket の場合 (§6.2.1) と同様にくりこみ群が閉じるように，各スケール $n \in \mathbb{Z}_+$ と各添字 $I \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d}$ ごとに，F_n 上の self-avoiding path の集合 $\Omega_I^{(n)}$ を用意する．

$d \geqq 3$ で pre-Sierpiński gasket の場合と異なるのは，単位単体の通り方についての分類（命題 6.9）と同様に，1 本の path だけではなく 2 本以上の互いに交わらない self-avoiding path の組も考える必要がある点である．たとえば，$\Omega^{(n)}_{(1,3,0,\dots,0)}$ は互いに交わらない（同じ点を通らない）F_n 上の 2 本の self-avoiding path の組であって，1 本は F_n の外側の二つの頂点の間を結ぶが，途中で他の外側の頂点を通らず，もう 1 本は両端以外に途中で 2 個の外側の頂点を通るもの，という条件を満たす path の 2 本一組の集合である．

念のため記号で書くと次のようになる．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $u, v \in G_n$ に対して $\Omega^{(n,u,v)}$ を

$$\Omega^{(n,u,v)} = \{w \in \Omega_0 \mid w(0) = u,\ w(L(w)) = v, \quad w(i) \in G_n\,,\ i \in \mathbb{Z}_+\}$$

によって定義する．そして，$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して $\Omega_I^{(n)}$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned}\Omega_I^{(n)} = \{&(w_1, w_2, \dots, w_k) \in \Omega^{(n,O,v_{n,i_1})} \times \Omega^{(n,v_{n,i_1+1},v_{n,i_1+i_2+1})} \\ &\times \Omega^{(n,v_{n,i_1+i_2+2},v_{n,i_1+i_2+i_3+2})} \times \cdots \\ &\times \Omega^{(n,v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}+k-1},v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_k+k-1})} \mid \\ &i \neq j \text{ なる } w_i \text{ と } w_j \text{ は共通点を持たず，また，各 } j \text{ に対して} \\ &w_j \text{ は } v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j-1},\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j},\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j+1}, \\ &\dots,\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+i_j+j-1} \text{ をこの順序に通るが} \\ &\text{他の } \{v_{n,\ell} \mid \ell = 0, 1, 2, \dots, d\} \text{ の点は通らない } \}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで $v_{n,i}$ たちは §6.1.2 で定義した通り F_n のもっとも外側の $d+1$ 個の頂点を表す．もちろん，(6.22) の中に出てくる k の値は $\Omega_I^{(n)}$ の各要素（path

の組）がそれぞれ何本の互いに交わらない path からなっているかという本数である．

例 6.11　$d=4$ に対して $f_4=6$ 種類の集合 $\Omega_I^{(n)}$ を列挙すると次のようになる．

$\{(1)\}$:　O から $v_{n,1}$ への self-avoiding path で $v_{n,2}$, $v_{n,3}$, $v_{n,4}$ を通らないものの集合．

$\{(2)\}$:　O から $v_{n,1}$ を通って $v_{n,2}$ に達する self-avoiding path で $v_{n,3}$, $v_{n,4}$ を通らないものの集合．

$\{(3)\}$:　O から $v_{n,1}$, $v_{n,2}$ の順に通って $v_{n,3}$ に達する self-avoiding path で $v_{n,4}$ を通らないものの集合．

$\{(4)\}$:　O から $v_{n,1}$, $v_{n,2}$, $v_{n,3}$ の順に通って $v_{n,4}$ に達する self-avoiding path の集合．

$\{(1,1)\}$:　互いに交わらない，O から $v_{n,1}$ への self-avoiding path と $v_{n,2}$ から $v_{n,3}$ への self-avoiding path の組でどちらも $v_{n,4}$ を通らないものの集合．

$\{(1,2)\}$:　やはり path の組の集合だが，1 本は O から $v_{n,1}$ へ，もう 1 本は $v_{n,2}$ から $v_{n,3}$ を通って $v_{n,4}$ への path になっているものの集合．　◇

拡張された歩数　Path または path の組 $w \in \Omega_I^{(n)}$ と添字 $J \in \mathcal{J}_d$ に対して，$s_J(w)$ を，F_n の単位単体で w との交わりが J 型のものの個数とする．記号で書くと次のようになる．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I=(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in \mathcal{I}_d$ と $w \in \bigcup_{I\in\mathcal{I}_d} \Omega_I^{(n)}$ に対して w が通る辺の集合を $\hat{w}$ で表す．すなわち，$w=(w_1,w_2,\ldots,w_k) \in \Omega_I^{(n)}$ に対して

$$\hat{w} = \{\overline{w_j(i)w_j(i+1)} \in B \mid i=0,1,2,\ldots,L(w_j)-1,\ j=1,2,\ldots,k\}$$

とおく．そして，$S_J(w)$, $J \in \mathcal{I}_d$, を

$$S_J(w) = \{\Delta \in \mathcal{T}_b \mid \hat{w} \cap \Delta \text{ は (6.21) の } \Delta_J \text{ に合同}\}, \tag{6.23}$$

で定義し，その個数を $s_J(w) = \sharp S_J(w)$ とおく．総歩数（長さ）と次の関係がある．

$$\sum_{i=1}^{k} L(w_i) = \sum_{J \in \mathcal{I}_d} |J| s_J(w), \quad w = (w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \Omega_I^{(n)},$$
$$I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_d\,,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.24}$$

ここで，(pre-Sierpiński gasket のときと同様に）$J \in \mathcal{I}_d$ に対して $|J|$ を J の長さ，すなわち，

$$J = (j_1, \ldots, j_\ell) \text{ のとき } |J| = j_1 + \cdots + j_\ell \tag{6.25}$$

とおいた．

くりこみ群　dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群は path の組の集合の族 $(\Omega_I^{(n)}\,,\ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する $(s_J\,,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の結合母関数，すなわち，

$$X_{n,I}(\mathbf{x}) = \sum_{w \in \Omega_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad \mathbf{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.26}$$

(0^0 は 1 の略記と理解する）で定義される

$$\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d) :\ \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$$

((6.26) の右辺は有限和なので $X_{n,I}$ は $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ 全体で定義される）の，スケール n に関する次の再帰式である．

命題 6.12 (dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群)　$\mathbf{X}_n = (X_{n,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, は

$$\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},$$

および

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{\Phi} \circ \mathbf{X}_n \tag{6.27}$$

で定まる．ここで

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_I,\ I \in \mathcal{I}_d) = \mathbf{X}_1\,, \tag{6.28}$$

は f_d 次元関数で，各成分は f_d 変数正係数多項式である（したがって特に，${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ は $\mathbf{\Phi}$ の不変部分集合である）．

多項式の各項の次数は 2 以上 $d+1$ 以下であり，$\Phi_{(1)}$ は ${x_{(1)}}^2$ および ${x_{(1)}}^{d+1}$ という項を持つ．◇

証明　有限 gasket F_n の n を変えたときの相似性から，再帰式 (6.27) が全ての n に対して成り立つことは pre-Sierpiński gasket の場合（命題 6.3）と同様である．

定義 (6.26) から，$\Phi_I = X_{1,I}$ の各項は $\displaystyle\prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}$ という形をしているので，その次数 $\displaystyle\sum_{J \in \mathcal{I}_d} s_J(w)$ は，定義 (6.23) から，w が通る F_1 の単位単体の個数に等しい．w は F_1 の外側の頂点を結ぶので長さ 2 以上だから次数は 2 以上であり，また次数は F_1 の中にある単位単体の個数 $d+1$ 以下である．$\Phi_I = X_{1,I}$ の係数が正であることも明らか．

$\Phi_{(1)} = X_{1,(1)}$ に $x_{(1)}^2$ と $x_{(1)}^{d+1}$ という項があることは，それぞれ $\Omega_{(1)}^{(1)}$ の path $\overline{Ov_{0,1}v_{1,1}}$ および

$$\overline{Ov_{0,d}(v_{0,d} + v_{0,d-1})(v_{0,d-1} + v_{0,d-2}) \cdots (v_{0,2} + v_{0,1})v_{1,1}}$$

に由来する．□

くりこみ群の不変部分集合　Pre-Sierpiński gasket の場合に比べて一般の dSG について複雑な事情がもう 1 点ある．実際にくりこみ写像を調べてみると，$d = 3$ では $\mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d} \setminus \{O\}$ の中に複数の固定点がある [24]．そこで，一般に dSG では self-avoiding path の漸近的性質に関係のある固定点を選ぶ必要がある．結論からいうと，くりこみ群のある不変部分集合 $\Xi_d \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d}$ の中にあ

る固定点が重要である．ここで Ξ_d が不変部分集合であるとは $\mathbf{x} \in \Xi_d$ ならば必ず $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \Xi_d$ となることを言う．

Ξ_d は次のように定義される．添字 $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ と $J = (j_1, \ldots, j_\ell) \in \mathcal{I}_d$ に対して $I \oplus J$ を $k + \ell$ 個の非負正数 $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_\ell$ を非減少になるように並べ替えた列とし，$\Xi_d \subset {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ を

$$\Xi_d = \{\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid I \oplus J \in \mathcal{I}_d \text{ なる全ての } I, J \in \mathcal{I}_d \text{ に対して } x_{I\oplus J} \leqq x_I x_J \text{ が成り立つ}\} \tag{6.29}$$

で定義する．

例 6.13

$$\begin{aligned} \Xi_2 &= {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_2} \ (= {\mathbb{R}_+}^2), \\ \Xi_3 &= \{\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2\}, \\ \Xi_4 &= \{\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_4} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2,\ x_{(12)} \leqq x_{(1)}x_{(2)}\}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Sierpiński gasket ($d = 2$) の場合は条件がつかないので Ξ は元のパラメータ空間 ${\mathbb{R}_+}^2$ に等しい． ◇

命題 6.14 Ξ_d は $\mathbf{\Phi}$ の不変部分集合である． ◇

証明 $I, J, I \oplus J \in \mathcal{I}_d$ とする．$\Omega^{(1)}_{I\oplus J}$ は外側の頂点の通り方が I 型の path の組と J 型の path の組（であって互いに交わらないもの）の集合だから，両者をより分けることで，自然な 1 対 1 対応 $\Omega^{(1)}_{I\oplus J} \to \Omega^{(1)}_I \times \Omega^{(1)}_J$ がある．この対応で $w \in \Omega^{(1)}_{I\oplus J}$ に対して $(w_1, w_2) \in \Omega^{(1)}_I \times \Omega^{(1)}_J$ が得られるとする．このとき，各 $\Delta \in \mathcal{T}_b$ に対して $\hat{w} \cap \Delta$ は $\hat{w}_1 \cap \Delta$ と $\hat{w}_2 \cap \Delta$ に分解されるので，$\hat{w} \cap \Delta$ が $K \in \mathcal{I}_d$ に対する (6.21) の Δ_K に合同とすると，この分解に対応して $K = K_1 \oplus K_2$ となる $K_1, K_2 \in \mathcal{I}_d$ が（空集合を許して）存在して各 $i = 1, 2$ に対して $\hat{w}_i \cap \Delta$ は Δ_{K_i} に合同になる．

次に，$\mathbf{x} \in \Xi_d$ ならば定義 (6.29) から $x_{K_1\oplus K_2} \leqq x_{K_1}x_{K_2}$ となることに注意すると，定義 (6.28) と (6.26) から，

$$\Phi_{I\oplus J}(\mathbf{x}) = \sum_{w\in\Omega^{(1)}_{I\oplus J}} \prod_{K\in\mathcal{I}_d} {x_K}^{s_K(w)}$$
$$\leqq \sum_{w_1\in\Omega^{(1)}_I} \sum_{w_2\in\Omega^{(1)}_J} \prod_{K_1\in\mathcal{I}_d} {x_{K_1}}^{s_{K_1}(w_1)} \prod_{K_2\in\mathcal{I}_d} {x_{K_2}}^{s_{K_2}(w_2)} = \Phi_I(\mathbf{x})\Phi_J(\mathbf{x}).$$

□

Ξ_d の中にある $\mathbf{\Phi}$ の固定点（詳しく言うと，§6.3.2 で定義する self-avoiding 固定点）が self-avoiding path の漸近的性質に関係する固定点である．

以下では，$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ に対して，

$$\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{K}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d} \mid x_J = 0,\ J \notin \mathcal{K}\} \ \subset\ \mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d} \tag{6.31}$$

という，多少横着した記号を用いる．$\mathbb{C}^{\mathcal{K}} \subset \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ や $\mathbb{Z}_+^{\mathcal{K}} \subset \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}$ などといった書き方もする．

6.3　くりこみ群から漸近的性質へ

6.3.1　この節の目標

§6.2 の命題 6.3 と命題 6.12 で dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群を定義したので，§5.2 に習うとくりこみ群そのものの解析となる．しかし，くりこみ群の解析は $d = 2,3$ では完成しているけれども $d \geqq 4$ では未解決である．ここでは，くりこみ群解析の d に関する一般論は未解決課題として保留し，§5.3 に対応すること，すなわち，くりこみ群解析ができたとしてそこから dSG 上の self-avoiding path の漸近的性質を導くこと，を一般の d について調べる．

くりこみ群解析を後回しにするためには，くりこみ群解析から得られる結果について仮定をおく必要がある．仮定は，漸近的性質（ここでは主に変位の指数）を導くのに十分な強さであって，かつ，dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群において成り立っていると確信できる程度に緩いものでなければいけない．以下で取り上げる仮定は $d = 2, 3, (4)$ における具体的なくりこみ群解析に基づくものである．

くりこみ群解析から得るべき性質という点で §5.3.2 とのいちばん大きな違いは，§6.2.2 で指摘したように，くりこみ群の大局的な軌道の追跡が必要と

なる点である．これは，§6.1.4 で強調したように，この節 §6 では長さ k を決めるごとに単純平均（一様分布）を考えてその $k \to \infty$ での漸近的性質を調べているからである．§6.3.2 の内容を先取りすると，くりこみ写像 $\boldsymbol{\Phi}$ から引き出されるべき基本量は次の二つである

(i) $\boldsymbol{\Phi}$ の self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ における $\boldsymbol{\Phi}$ のヤコビ行列の最大固有値 λ.

(ii) 臨界点 β_c，すなわち，critical surface（くりこみ群軌道が self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ に収束するような初期値の集合）と canonical surface（ここでは，下記 (6.34) で定義される曲線なので canonical curve と呼ぶことにしよう）の交点.

λ や β_c のきちんとした定義とくりこみ写像 $\boldsymbol{\Phi}$ に対しておく仮定は §6.3.2 の (FP1)–(FP4), (CS1) に与える.

この節 §6.3 の具体的目標は（補遺 §D, §E と合わせることで）次の定理を証明することである．$d \geqq 2$ とし，$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して $N(k)$ を原点から出発する dSG 上の長さ k の self-avoiding path の本数とし，E_k をそれらの self-avoiding path の集合の上の一様分布に関する期待値（すなわち，k 歩の self-avoiding path に関する単純平均）とする.

定理 6.15 (定理 6.28 および定理 6.29) 臨界点 β_c が存在するならば

(i) dSG 上の self-avoiding path の connective 定数は e^{β_c} である．すなわち，
$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c$.

(ii) dSG 上の self-avoiding path の変位の指数は次の意味で ν である.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log \mathrm{E}_k[\,|w(k)|^s\,] = s^{\nu}, \quad s \geqq 0 .$$

ここで $|\cdot|$ は dSG が埋め込まれている $\mathbb{R}^d$ の通常のユークリッド距離を表し，また，$\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおいた. ◇

注 6.16 上記の結論は大ざっぱに言うと，$N(k) \doteqdot e^{\beta_c k}$ および $|w(k)| \doteqdot k^{\nu}$ ということである．定理 6.28 と定理 6.29 ではこれらに対する補正に関する若干の性質も得られる. ◇

くりこみ群の考え方に慣れている読者にとっては定理 6.15 の主張は自然なものである．重要なのは，数学的に厳密なくりこみ群の軌道解析の定式化 (§6.3.2) に基づいて，path の漸近的性質という結果 (§6.3.3) を dSG 上の self-avoiding path に関して d について統一的に数学的に証明できる点である．これまで物理的な描像に助けられながら語られてきた「力学系としてのくりこみ群が確率的（統計力学的）な物理現象の漸近的性質の情報を持っている」（図 6.15）という指導原理を数学的な概念として定式化する具体的な手がかりとなることが期待できる．

λ や β_c が存在しなければ定理 6.15 は無意味である．すでに注意したようにその存在は全ての dSG について証明することはできていないがいくつかの d では証明できている．§6.3.2 では一般的な定義の例という形で $d = 2$, すなわち，Sierpiński gasket の場合に λ や β_c が存在すること，したがって，Sierpiński gasket 上の self-avoiding path は定理 6.15 の結論に述べられている漸近的性質を持つこと，を証明していく．

6.3.2　固定点と臨界点

§6.3.1 で要約したことに従って，まずくりこみ群解析から得られるべき情報を定式化する．命題 6.12 の $\mathbf{\Phi}$ のヤコビ行列（微分写像）を $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_{IJ})$ とおく．すなわち，

$$\mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_J}(\mathbf{x}), \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,,\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}. \tag{6.32}$$

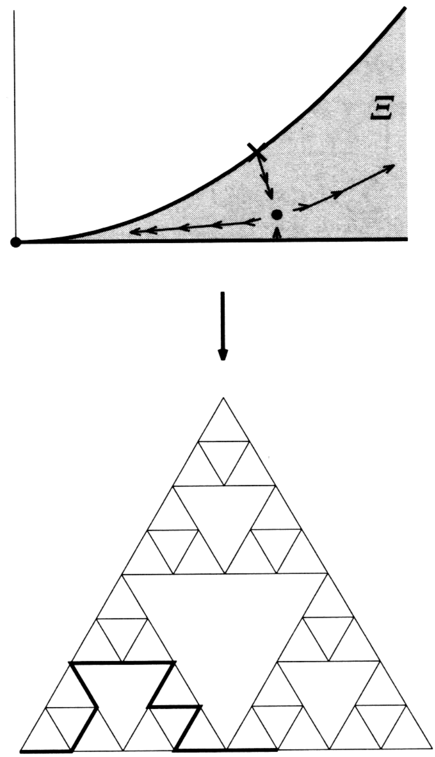
例 6.17　Pre-Sierpiński gasket($d = 2$) の場合は (6.11) から

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_{(1)} + 2x_{(2)} + 3x_{(1)}^2 + 4x_{(1)}x_{(2)} & 2x_{(1)} + 2x_{(2)} + 2x_{(1)}^2 \\ 2x_{(1)}x_{(2)} + x_{(2)}^2 & x_{(1)}^2 + 2x_{(1)}x_{(2)} \end{pmatrix}. \tag{6.33}$$

◇

$\mathbf{x}_c \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が *self-avoiding* 固定点であるとは以下が成り立つことと定義する．

(FP1) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{x}_c$, すなわち，$\mathbf{x}_c$ は $\mathbf{\Phi}$ の固定点である．



$$|w(k)| \fallingdotseq k^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

図 6.15

(FP2) $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ が対角化可能である．その固有値のうち絶対値が最大のものは一つだけ（単根）であり，それを λ とおくとき，λ は実数で $\lambda > 1$ を満たし，他の全ての固有値は絶対値が 1 未満である．

λ に対応する $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の左固有ベクトルを $\mathbf{v}_L = (v_{L,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$ とおく．すなわち，

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_d} v_{L,I} \mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}_c) = \lambda v_{L,J}\,, \quad J \in \mathcal{I}_d\,.$$

このとき $v_{L,J} > 0$, $J \in \mathcal{I}_d$（すぐ分かるように $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の各成分は非負

なので，フロベニウスの定理から $\mathbf{v}_L$ の各成分も非負にとることができる．ここでの仮定はどの成分もゼロでないことである)．

同様に，λ に対応する $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の右固有ベクトルを $\mathbf{v}_R$ とおく．すなわち，

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_d} \mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}_c) v_{R,J} = \lambda v_{R,I}\,,\quad I \in \mathcal{I}_d\,.$$

このとき $v_{R,(1)} > 0$.

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ であるような全ての $I \in \mathcal{I}_d$ に対して，多項式 Φ_I の項 $\prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J{}^{m_J}$ $(m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d})$ のうちで，$x_{c,J} = 0$ なる x_J を含まず（すなわち $m_J = 0$ であって）$x_{(1)}$ を含む（すなわち $m_{(1)} > 0$ となる）ものが存在する．

(FP4) $\mathbf{x}_c \in \Xi_d \setminus \{\mathbf{0}\}$, すなわち，$\mathbf{x}_c$ は (6.29) で定義した $\mathbf{\Phi}$ の不変部分集合に入っている．

(FP2) の固有値の大きさに関する仮定は，理論物理学の臨界現象においてくりこみ群が有効であるための条件の一つとされてきたスケーリング仮説である．　力学系として固定点の近傍で一つの方向だけ不安定 (relevant) で，あとの方向は安定でしたがって漸近的性質に効かない (irrelevant) という状況にモデルがなっている，という仮定である．大ざっぱに言うと不安定な方向はスケール変換の方向である．ここで，総歩数 L に対応する変数 β の方向がほぼ不安定な方向ということになる．

Self-avoiding path に特徴的な仮定は (FP4) である．実際，$d = 3, 4$ では $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_d}$ に複数の固定点があることが分かっている．このうち self-avoiding path の漸近的性質に関係するのは Ξ_d に入っているものであることは Ξ_d が不変部分集合であることと canonical curve が Ξ_d に含まれる（Ξ_d の境界に含まれる）ことから分かる．

例 6.18　Pre-Sierpiński gasket $(d = 2)$ の場合，命題 6.5 から $\mathbb{R}_+{}^2 \setminus \{(0,0)\}$ における $\mathbf{\Phi}$ の固定点はただ一つ $\mathbf{x}_c = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 0\right)$ である．これが self-avoiding 固定点の残りの条件 (FP2), (FP3), (FP4) を満たすことを確かめよう．

(6.33) に $\mathbf{x}_c$ の値を代入すると

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_c) = \begin{pmatrix} \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} & 2 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

となるので，固有値が $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$ と $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ であって，対角化可能であることはすぐ分かる．これより (FP2) は全て満たすことが分かる．特に，最大固有値 $\lambda = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$ に対応する左および右固有ベクトルはそれぞれ $\mathbf{v}_L = (1,1)$ および $\mathbf{v}_R = (1,0)$ となって (FP2) を満たす．

$x_{c,I} \neq 0$ となるのは $I = (1)$ であるが，(6.11) から，$\Phi_{(1)}(\mathbf{x})$ には $x_{(2)}$ を含まず $x_{(1)}$ を含む項たち $x_{(1)}^2 + x_{(1)}^3$ があるので (FP3) が成り立つ．

最後に (FP4) は，$d = 2$ では (6.30) から $\Xi_2 = {\mathbb{R}_+}^2$ なので無条件で成り立っている．

よって $\mathbf{x}_c = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 0\right)$ は self-avoiding 固定点である．　◇

上の例から次を得る．

定理 6.19　Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path は self-avoiding 固定点をただ一つ持つ．　◇

$d = 3$ に対しても $\mathbf{\Phi}$ をあからさまに求めることで self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ の唯一性が分かっている [24]．しかし，一般的には固定点の唯一性は簡単ではない．

臨界点の定義に進む前に，(FP2) の λ の値の（定義と仮定だけから直ちに得られるという意味で apriori な）評価を示しておく．

命題 6.20　Self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ に対して (FP2) で与えられる λ は $2 < \lambda < d+1$ を満たす．　◇

証明　命題 6.12 と (6.32) から

$$2\Phi_I(\mathbf{x}) < \sum_{J\in\mathcal{I}_d} \mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}) x_J < (d+1)\Phi_I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d};\ x_{(1)} > 0\,.$$

これと (FP1) と (FP2) から

$$2\sum_{I\in\mathcal{I}_d} v_{L,I}x_{c,I} < \lambda \sum_{J\in\mathcal{I}_d} v_{L,J}x_{c,J} < (d+1)\sum_{I\in\mathcal{I}_d} v_{L,I}x_{c,I}$$

となって主張を得る． □

臨界点 β_c を定義するために，§6.2.2 の冒頭で言及した canonical curve (canonical surface) を定義する．$\beta \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{x}_{can}(\beta) = (x_{can,I}(\beta),\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$x_{can,I}(\beta) = e^{-\beta|I|},\quad I \in \mathcal{I}_d \tag{6.34}$$

で定義する．ここで $|I|$ は (6.25) に定義した通り，path が単位単体と I 型で交わるときの単位単体内の path の総歩数である．$\mathbf{x}_{can}$ はパラメータ空間 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d}$ の中の曲線を表している．これを canonical curve (canonical surface) と呼ぶ．

例 6.21　$d = 2$ (pre-Sierpiński gasket) の場合は $\mathcal{I}_2 = \{(1),(2)\}$ および $|(1)| = 1$, $|(2)| = 2$ なので

$$\mathbf{x}_{can}(\beta) = (e^{-\beta}, e^{-2\beta}). \tag{6.35}$$

$\beta \in \mathbb{R}$ を消去すると $\mathbf{x}_{can}$ は ${\mathbb{R}_+}^2$ の中の放物線 $y = x^2$, $x > 0$, を表していることが分かる． ◇

Canonical curve の意味は，くりこみ群が作用するパラメータ空間 $\mathbb{R}_+^{\mathcal{I}_d}$ の中で path の集合 $\Omega_I^{(n)}$ に対する総歩数の母関数に対応する点の集合である．これは，総歩数の母関数 $\mathbf{Z}_n = (Z_{n,I}\ ,\ I \in \mathcal{I}_d)$ の成分

$$Z_{n,I}(\beta) = \sum_{w\in\Omega_I^{(n)}} e^{-\beta L(w)},\quad \beta \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{6.36}$$

を (6.24) によって書き換えることで

$$Z_{n,I}(\beta) = X_{n,I}(\mathbf{x}_{can}(\beta)),\quad \beta \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{6.37}$$

となることを指す．すなわち，canonical surface 上で $\mathbf{X}_n$ の n に関する振る舞いを見ることが総歩数 L の漸近的性質を見ることに対応している（$\mathbf{Z}_n$ は統計力学の分配関数に対応する (§A.3)）．

臨界点 β_c を次のように定義する．

(CS1) $\beta_c \in \mathbb{R}$ が臨界点であるとは，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n(\mathbf{x}_{can}(\beta_c)) = \mathbf{x}_c$$

を満たす self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ が存在することを言う．すなわち，canonical curve 上の点であって，それを初期値とするくりこみ群の軌道が self-avoiding 固定点に収束するものを臨界点という．

定義 (CS1) によって臨界点 β_c には，対応する self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ の存在が前提となっていることに注意．しかも，対応する固定点は定義 (CS1) からただ一つに定まる．$d = 2$ (pre-Sierpiński gasket) の場合に臨界点が存在することを §6.3.4 で証明する．

$d = 3$ に対しても $\mathbf{\Phi}$ をあからさまに求めてくりこみ群軌道を具体的にかつ詳しく調べることで臨界点の存在が分かっている [24]．しかし，たとえ固定点の存在や唯一性が分かっても，縮小と拡大が混在する力学系にはカオスなどの複雑な振る舞いが一般的に見られるため，軌道の固定点への収束を示す一般論は多くなく，一般の d に対する臨界点の存在を示すことは今のところできない．

6.3.3 漸近的性質

§6.3.2 で定式化した dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群に対する仮定から，path の漸近的性質に関して証明できるいくつかの主な結果を以下に要約する．証明は補遺 §D，§E で行う．

§6.3.2 では固定点や臨界点を定義したが，それが dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群で全ての d に対して存在するかどうかは現時点では未解決である．しかし，その前段階となる critical surface は以下に見るようにくりこみ群の軌道が無限遠に発散しない初期値の集合の境界点の集合として与

えられる．

$$D = \{\mathbf{x} \in \Xi_d \mid \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \max_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}) < \infty\} \tag{6.38}$$

とおいて，Ξ_d の中でのその外部，境界，内部をそれぞれ D^c, ∂D, D^o, とおく．すなわち，$D^c = \Xi_d \setminus \overline{D}$, $\partial D = \overline{D} \cap \overline{D^c}$, $D^o = D \setminus \partial D$.

定理 6.22 (i) D は次のようにも書ける．

$$D = \{\mathbf{x} \in \Xi_d \mid \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \max_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}) \leqq 1\}. \tag{6.39}$$

特に D は Ξ_d の閉集合である．

(ii) $\tilde{D} = \{\mathbf{x} \in \Xi_d \mid \lim_{n\to\infty} \max_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}) = 0\}$ とおき，$\mathbf{x} \in D$ および $\mathbf{x}' \in \Xi_d$ とする．各 $I \in \mathcal{I}_d$ ごとに $x'_I < x_I$ または $x'_I = x_I = 0$ が成り立つならば $\mathbf{x}' \in \tilde{D}$ である．

(iii) D^o は $\tilde{D}$ に等しい：

$$D^o = \tilde{D}. \tag{6.40}$$

(iv) D^c, ∂D, D^o はそれぞれ $\mathbf{\Phi}$ の空でない不変部分集合である． ◇

注 6.23 この定理は，固定点や臨界点の存否と無関係に成り立つ．大ざっぱにいうと $\mathbf{\Phi}$ が正係数多項式（または収束級数）であることと，原点の近傍で 2 次以上であることから得られる．この定理における ∂D が，くりこみ群の軌道が原点に収束せず無限遠にも発散しないような初期値の集合なので，その意味で critical surface の候補である． ◇

臨界点 β_c は critical surface ∂D と canonical curve (6.34) の交点であることから定理 6.22 に基づいて β_c の特徴づけができる．

定理 6.24 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が臨界点で $\mathbf{x}_c$ が対応する self-avoiding 固定点ならば各 $I \in \mathcal{I}_d$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,I}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta > \beta_c\,, \\ x_{c,I}\,, & \beta = \beta_c\,. \end{cases}$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{d} Z_{n,(i)}(\beta)=\infty,\quad \beta<\beta_c\,.$$

◇

定理 6.24 から特に，臨界点は（存在すれば）ただ一つである．(CS1) から，臨界点に対応する固定点はただ一つだから，path の漸近的性質に関係する self-avoiding 固定点はただ一つである．くりこみ群の不変部分集合 $\Xi_d\setminus\{0\}$ の中での固定点の唯一性は知られていないし，一般に固定点の唯一性は（拡大する方向と縮小する方向の両方を持つ力学系では）難しい問題だが，以下では，単に固定点と言うときは（臨界点が存在するという仮定の下での）対応する唯一の固定点を指す．

次の結果（定理 6.26）は path の歩数分布の漸近形に関するもので，§5 の例では §5.2.2 の定理 5.9 に相当する．これを述べるためにいくつか用語の準備を要する．

まず，固定点の座標の成分のいくつかが 0 になることに対応するくりこみ群の不変部分集合について注意する．$d=2$ の場合に (6.12) で見たように self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ の座標成分のいくつかは 0 になる．そこで，0 でない成分だけをとりだした添字集合

$$\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}=\{I\in\mathcal{I}_d\mid x_{c,I}\neq 0\},\tag{6.41}$$

を導入し，$\mathbf{x}_c$ の 0 成分に対応する成分は 0 とおいたパラメータ空間の部分集合を，(6.31) と同様の意味で少し横着して，

$${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}=\{\mathbf{x}\in{\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}\mid x_J=0,\ J\notin\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}\}\,,$$

と書くことにする．

命題 6.25 ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}$ は $\boldsymbol{\Phi}$ の不変部分集合である． ◇

証明 $x_{c,I}=0$ とすると $\Phi_I(\mathbf{x}_c)=x_{c,I}=0$ だが，Φ_I は正係数多項式なので $\Phi_I(\mathbf{x})$ の各項は $x_{c,J}=0$ となる x_J を含んでいなければならない．すなわち

$\Phi_I(\mathbf{x})$ の各項は $J \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ となる x_J を含む．したがって，$\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}$ ならば $x_{c,I} = 0$ なる I に対して $\Phi_I(\mathbf{x}) = 0$ となる． □

次に，固定点の domain of attraction を定義しておく．Self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ に対して，$\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が $\mathbf{x}_c$ の *domain of attraction* に入っているとは以下が成り立つことと定義する．

(DA1) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_c$.
(DA2) 各 $I \in \mathcal{I}_d$ に対して $x_{c,I} \neq 0$ ならば $x_I \neq 0$.

Self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ に対して，その domain of attraction に入っている点 $\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ の集合を $\mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ と書くことにする．この記号を用いると，(CS1) より β_c が臨界点であるとは，

$$\mathbf{x}_{can}(\beta_c) \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$$

となる self-avoiding 固定点 $\mathbf{x}_c$ が存在することを言う（$\mathbf{x}_{can}(\beta_c)$ は，どの成分も 0 ではないので (DA2) は必ず満たされている）．

たとえば $\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点ならば $\mathbf{x}_c \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ である．

$I \in \mathcal{I}_d$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ に対して，$X_{n,I}(\mathbf{x}) \neq 0$ なるとき，$\Omega_I^{(n)}$ 上の確率測度 $\mu_{\mathbf{x},n,I}$ を

$$\mu_{\mathbf{x},n,I}[\{w\}] = \frac{1}{X_{n,I}(\mathbf{x})} \prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad w \in \Omega_I^{(n)}, \tag{6.42}$$

で定義する．$x_{c,I} \neq 0$ かつ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ ならば (DA1) から十分大きな n に対して $X_{n,I}(\mathbf{x}) > 0$ となるので，$\mu_{\mathbf{x},n,I}$ は定義される．

定理 6.26　$\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点で $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ ならば以下が成り立つ．

(i) $\mathcal{J}_n$ を (6.32) で定義するとき，非負要素からなる f_d 行 f_d 列の行列 $\Lambda(\mathbf{x})$ が存在して，

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \mathcal{J}_n(\mathbf{x}). \tag{6.43}$$

(ii) $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ に対して，拡張された歩数 s_J を (FP2) の λ によってスケールしたもの $(\lambda^{-n} s_J\,,\ J \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c})$ の $\mu_{\mathbf{x},n,I}$ の下での結合分布は，$n \to \infty$ の極限で $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上のあるボレル確率測度に弱収束する．極限測度を $p^*_{\mathbf{x},I}$ と書くことにするとその台は ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ に含まれ，また，その母関数を

$$\varphi^*_I = \varphi^*_{\mathbf{x},I}$$

とおくと，$(t_J,\ J \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c})$ の関数として

$$\varphi^*_{\mathbf{x},I}(\mathbf{t}) = \int_0^\infty e^{\mathbf{t}\cdot\xi} p^*_{\mathbf{x},I}[d\xi], \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}\,,$$

によって定義され，$\mathbf{t}$ について整関数である．

(iii) 母関数たち $\varphi^*_I = \varphi^*_{\mathbf{x},I}\,,\ I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}\,,$ は

$$\begin{aligned} &x_{c,I}\,\frac{\partial \varphi^*_I}{\partial t_J}(\mathbf{0}) = \Lambda_{IJ}(\mathbf{x})\,x_{c,J}\,, && (I,\ J \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c} \text{ のとき,}) \\ &x_{c,I}\varphi^*_I(\lambda\mathbf{t}) = \Phi_I(\mathbf{x}_c\,\varphi^*(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}, && (I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c} \text{ のとき,}) \end{aligned} \tag{6.44}$$

によって（1 通りに）定まる．ただし，$J \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ に対して $\varphi^*_J = 0$ と定義する．また，$\mathbf{\Phi}$ の変数の中で

$$(\mathbf{x}\,\varphi^*(\mathbf{t}))_J = x_J\,\varphi^*_J(\mathbf{t}), \quad J \in \mathcal{I}_d\,, \tag{6.45}$$

という（少し横着した）書き方を用いた．

(iv) $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c) \cap \Xi_d$ かつ $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ ならば，$w \in \Omega^{(n)}_I$ において総歩数をスケールしたもの $\lambda^{-n} L(w)$ の分布は $\mu_{\mathbf{x},n,I}$ の下で C^∞ 密度を持つボレル確率測度に弱収束する．極限分布を $\overline{p}^*_{\mathbf{x},I}$，その密度を $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},I}$ と書くことにすると，$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}(\xi) > 0, \xi > 0,$ が成り立つ．　◇

注 6.27　(i) $x_{c,I} = 0$ ならば (6.44) の右辺は命題 6.25 と (6.43) から 0 になるので，$I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ の場合は (6.44) は自明に成り立つ．

(ii) 密度 $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},I}$ の存在と正値性は定理 6.28 で必要になる．　◇

$\Omega^{(n)}_I$ は端点を固定した（全長 L は決まっていない）path 集合であった．最初の目標に従って，全長を固定した path に関する結果に翻訳する．

原点 O を始点とする self-avoiding path の集合を $\Omega^{(0)}$ とおく．すなわち，$\Omega^{(0)} = \{w \in \Omega_0 \mid w(0) = O\}$．$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$N(k) = \sharp\{w \in \Omega^{(0)} \mid L(w) = k\}$$

を O を始点とする長さ k の self-avoiding path の本数とする．

定理 6.28　臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在するならば，

$$C_1 k^{C_3} e^{\beta_c k} \leqq N(k) \leqq C_2 k^{C_4} e^{\beta_c k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

が成り立つような（k によらない）正定数 C_1, C_2 と実定数 C_3, C_4 が存在する．
◇

自然数 k に対して，$\tilde{P}_k$ を $\Omega^{(0)}$ 上の一様分布，すなわち，

$$\tilde{P}_k[A] = \frac{1}{N(k)} \sharp\{w \in A \mid L(w) = k\}, \quad A \subset \Omega^{(0)},$$

で定義される確率測度とし，$\tilde{P}_k$ に関する期待値，すなわち path に関する単純平均を E_k とおく．

定理 6.29　臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在するならば，対応する固定点に対する (FP2) の λ を用いて

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \lambda} \tag{6.46}$$

とおくとき，

$$s \log k - s\alpha \log\log k + C \leqq \log \mathrm{E}_k[\,|w(k)|^{s/\nu}\,] \leqq s \log k + s\alpha \log\log k + C',$$
$$k \geqq k_0, \ s \geqq 0,$$

となる実定数 α, k_0, C, C' が存在する．ここで $|\cdot|$ は dSG が埋め込まれている $\mathbb{R}^d$ のユークリッド距離．　◇

この定理は，最初の目標どおり，くりこみ群に対する §6.3.2 で定式化した仮定の下で，変位の指数（$|w(k)| \fallingdotseq k^{\nu}$ なる ν）の存在を示す．

この節の定理（定理 6.24, 定理 6.26, 定理 6.28, 定理 6.29）の証明は少々長いので補遺 §D，§E に回す．証明の「精神」は，§5 で考察した $\mathbb{Z}$ 上の path のくりこみ群の解析 (§5.2) と同様である（くりこみ群という統一的な解析手段があるという期待からはそうあるべきである）．ただし，くりこみ群の作用するパラメータ空間が 1 次元から多次元になることから，主要な成分以外は効かないことを示すという手続きがあることと，ここでは path 上の一様分布を考えるのでくりこみ群の canonical surface と固定点が離れている点が §5 と異なる．

この節の定理の仮定は，(FP1)–(FP4) を満たす固定点 $\mathbf{x}_c$ と λ および (CS1) を満たす臨界点 β_c が存在することである．dSG 上の self-avoiding path についてこの節の定理の結論が成り立つためには，それぞれの d について固定点と臨界点が存在することを証明する必要がある．途中で例として挙げたことと次節 §6.3.4 から，$d=2$，すなわち，pre-Sierpiński gasket の場合に固定点と臨界点の存在は証明できるので，この節の定理の結果が全て成り立つ．さらに，$d=3$ の場合も [24] によって固定点と臨界点の存在が証明されているので，この節の定理の結果が全て成り立つ．$d=4$ の場合は self-avoiding path を，漸近的性質にとって本質的（詳しく言うと λ の値が元のモデルと等しい）と考えられる部分集合に制限したモデルについて同様の結果が全て成り立つ [29]．$d=4$ の本来のモデルと $d \geqq 5$ は未解決であるが，以上の $d \leqq 4$ までの結論に基づいて，次を予想する．

予想 6.30 全ての $d=2,3,4,\ldots$ に対して dSG 上の self-avoiding path のくりこみ群は self-avoiding 固定点と臨界点を持つ．したがって，定理 6.24, 定理 6.26, 定理 6.28, 定理 6.29 の結論，たとえば変位の指数の存在，が成り立つ． ◇

6.3.4 Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群解析

[23] に従って pre-Sierpiński gasket ($d=2$) の場合に臨界点が存在することを証明する．

$(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ならば (6.11) より

$$X_{1,(1)}(x,y) = \Phi_{(1)}(x,y) \geqq (x+y)^2 > 0$$

となるので，$X_{n,(1)}(x,y) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, である．そこで $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$R_n(x,y) = \frac{X_{n,(2)}}{X_{n,(1)}}(x,y), \quad (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tag{6.47}$$

によって $R_n\colon\ {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}_+$ を定義できる．

命題 6.31　D を $d=2$ の場合に (6.38) で定義された ${\mathbb{R}_+}^2$ の部分集合とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}, \tag{6.48}$$

および

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,(2)}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{6.49}$$

◇

証明　(6.11) より $x>0$ かつ $y \geqq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{(2)}}{\Phi_{(1)}}(x,y) &= \frac{xy(x+2y)}{(x+y)^2 + x^2(x+2y)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(1+\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x+2y}} \frac{y}{x} \\ &\leqq \frac{1}{1+\frac{1}{x+2y}} \frac{y}{x}\end{aligned}$$

となることに注意すると，くりこみ群から

$$\begin{aligned}R_{n+1}(x,y) &= \frac{\Phi_{(2)}}{\Phi_{(1)}}(\mathbf{X}_n(x,y)) \\ &\leqq \frac{1}{1+\frac{1}{X_{n,(1)}(x,y)+2X_{n,(2)}(x,y)}} R_n(x,y), \quad x \in {\mathbb{R}_+}^2 \setminus \{(0,0)\}.\end{aligned}$$

このことと定理 6.22 から $(x,y) \in D$ ならば $X_{n,(i)}(x,y) \leqq 1$, $i=1,2$, $n \in \mathbb{N}$, であることから，$R_{n+1}(x,y) \leqq \dfrac{3}{4} R_n(x,y)$, $(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$, を得るから，特に (6.48) が従う．さらに，$(x,y) \in D$ ならば $X_{n,(1)}(x,y) \leqq 1$, $n \in \mathbb{N}$, だったから，(6.48) から (6.49) を得る．□

命題 6.32　$x_c = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ とおく．命題 6.31 と同じ D に関して，その ${\mathbb{R}_+}^2$ の中での境界 ∂D は，ある $[0, x_c]$ 上の狭義単調減少関数 $\psi\colon\ [0, x_c] \to \mathbb{R}_+$ を用いて $\partial D = \{(x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \mid y = \psi(x)\}$ と書ける．特に $\psi(0) = \sqrt{x_c}$ および $\psi(x_c) = 0$ である．　◇

証明　(6.11) より $\boldsymbol{\Phi}(x, 0) = (x^2 + x^3, 0)$ なので，$0 \leqq x < x_c$ ならば $(x, 0) \in D^o$，$x > x_c$ ならば $(x, 0) \in D^c$．よって $(x, 0)$ の形の ∂D の点は $(x_c, 0)$ ただ一つである．さらに，このことと定理 6.22 から $x > x_c$ かつ $y \geqq 0$ ならば $(x, y) \in D^o$．同様に $\boldsymbol{\Phi}(0, y) = (y^2, 0)$ なので，上記から $0 \leqq y < \sqrt{x_c}$ ならば $(0, y) \in D^o$，$y > \sqrt{x_c}$ ならば $(0, y) \in D^c$．よって $(0, y)$ の形の ∂D の点は $(0, \sqrt{x_c})$ ただ一つである．次に $0 < x \leqq x_c$ かつ $0 \leqq y < y'$ とする．再び (6.11) より

$$\Phi_{(1)}(x, y') = (x + y')^2 + x^2(x + 2y') > \Phi_{(1)}(x, y)$$

および

$$\Phi_{(2)}(x, y') = xy'(x + 2y') > \Phi_{(2)}(x, y)$$

となるので，定理 6.22 から $(x, y) \in \partial D$ ならば $(x, y') \in D^c$ であり，また $(x, y') \in \partial D$ ならば $(x, y) \in D^o$ である．よって各 $x \in (0, x_c]$ に対して (x, y) の形の ∂D の点はただ一つに決まるので，$\psi\colon\ [0, x_c] \to \mathbb{R}_+$ を各 x に対して $(x, \psi(x)) \in \partial D$ なるように選ぶことで定義できる．

次に $0 \leqq x < x'$ かつ $y > 0$ とする．再び (6.11) より

$$\Phi_{(1)}(x', y) = (x' + y)^2 + x^2(x' + 2y) > \Phi_{(1)}(x, y)$$

および

$$\Phi_{(2)}(x'y') = x'y(x' + 2y) > \Phi_{(2)}(x, y)$$

となるので，定理 6.22 から $(x, y) \in \partial D$ ならば $(x', y) \in D^c$ となり，ψ は狭義減少である．　□

定理 6.33　Pre-Sierpiński gasket (2SG) 上の self-avoiding path のくりこみ群について

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,(1)}(x,y) = x_c, \quad (x,y) \in \partial D. \tag{6.50}$$

特に，臨界点 β_c が存在する．◇

証明　定理 6.22 から D は閉集合なので $\partial D \subset D$ であり，また ∂D はくりこみ群の不変部分集合だから，(6.49) と命題 6.32 から (6.50) が従う．命題 6.32 から，ψ は狭義減少なので，放物線 $y = x^2$ は ∂D とただ 1 点で交わる．その交点を $(e^{-\beta_c}, e^{-2\beta_c})$ とおくと (6.35) と (CS1) より β_c が求める臨界点である．□

Pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群は定理 6.19 から self-avoiding 固定点が存在し，定理 6.33 から臨界点も存在するので，§6.3.3 の定理の仮定は全て成り立つ．よってその結論も全て成り立つ．たとえば定理 6.28 から定理 6.7 を，定理 6.29 から定理 6.1 を，それぞれ得る．

一連の結果に登場する定数は，(FP2) で定義されたくりこみ写像の固定点におけるヤコビ行列（微分写像）の最大固有値 λ と，(CS1) で定義された canonical curve と critical surface の交点，すなわち臨界点 β_c である．前者は §5 で登場した λ に対応している．後者は path 上の一様分布を考えた結果必要となったこの節に特有の量である．λ と β_c の間には単純な関係はない．数値的には定理 6.24 を用いて再帰式を追いかけることで $\beta_c = 0.827691\cdots$ ($e^{\beta_c} = 2.2880\cdots$) と求まる．

固定点 $\mathbf{x}_c$ や固定点における微分 λ ならびに ciritical surface は canonical surface（元の問題）のとりかたに（最初に設定したパラメータ空間に対応するモデルの集まりの範囲内で）無関係に決まる．くりこみ群の理論ではこのような出発点の系に対して安定な性質を普遍的と呼ぶことがある．物理学は実験的な検証に基づく学問だが，実験では数学的な意味で理想的な状態を作ることはできない．このため，系を多少変えても安定な性質は実験と理論の比較の際に重要になる．これに対して臨界点 β_c や connective 定数 e^{β_c}（注 6.8）は canonical surface のとりかたに依存するので普遍的ではない．

普遍的な量はあらわに計算できる可能性があるのに対して，普遍的でない量はそれが難しいという側面もある．実際，dSG 上の self-avoiding path の場合，λ は代数方程式の解として容易に任意の精度で計算できるが，β_c はそうはいかない．

§4 に書いたように n 次元正方格子 $\mathbb{Z}^n$ において $n < 4$ では self-avoiding path は単純ランダムウォークと漸近的性質が異なり，かつ，n によっても異なると予想されている．dSG ではくりこみ群が有限次元になることから，正方格子における $n = 1$（直線）の場合に近い，誤解を恐れず言えば $\mathbb{Z}^1$ と $\mathbb{Z}^2$ の間の次元の空間とみることができる．その意味で dSG は self-avoiding path にとって難しい低次元空間の問題への入口としての期待が持てる．実際 $d = 2, 3$ のときの dSG では self-avoiding path と単純ランダムウォークの変位の指数が無関係であり，self-avoiding path のそれは d への依存性が極めて複雑である（定理 6.1，注 6.2），という点で低次元正方格子で予想される状況に近い．

7章
Pre-d 次元 gasket 上のランダムウォークと等方性の回復

§4 で $\mathbb{Z}^n$ 上の単純ランダムウォークと self-avoiding path の漸近的性質（指数）の対比を紹介し，また，§6 では dSG 上の self-avoiding path を紹介した．そこで，この節では dSG 上のランダムウォークについて若干の事実を紹介する．

§7.1 では pre-Sierpiński gasket (2SG) の場合に，単純ランダムウォークのくりこみ写像の固定点における微分写像の最大固有値 $\lambda(SRW)_2$ を計算する．この方法だと一般の dSG の公式はすぐには見えないので，§7.2 では §3.4 で紹介した電気抵抗回路の計算とアインシュタイン関係式と呼ばれる関係式を用いて $\lambda(SRW)_2$ を計算する方法を紹介する．後者の方法は計算が容易で，一般の dSG への拡張は容易である．

§7.3 では話題を全く変えて，くりこみ群の大局的な軌道解析の §6 とは別の例として，$\mathbb{Z}^n$ 上のランダムウォークでは見られない等方性の回復の新しいメカニズムを紹介する．

7.1 Pre-Sierpiński gasket 上の単純ランダムウォークのくりこみ群

注 6.2 で，dSG 上の単純ランダムウォークの変位の指数が $\nu(SRW)_d = \dfrac{\log 2}{\log(d+3)}$ であることに言及した．この節 §7.1 ではこの値を具体的に導出する．実際に示すのは dSG 上の単純ランダムウォークのくりこみ群の固定点での微分写像の固有値 $\lambda(SRW)_d$ が $d+3$ になることである．それが単純ランダムウォークの変位の指数を与えることは証明を要するが省略する（[22] に，より一般的に §5.6.3 で紹介した self-repelling walk を Sierpiński gasket 上で構成したものについて導出してある）．

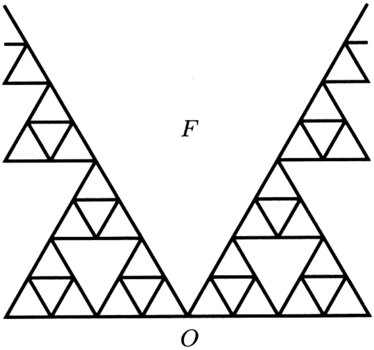


図 7.1

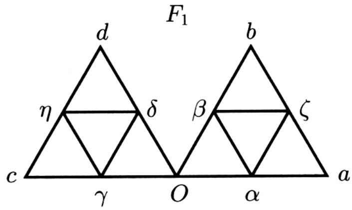


図 7.2

§6.1.1 では単位長さの辺をつないで作った 1 辺 2^n の三角形に対して $n \to \infty$ をとって得られる図形 F を pre-Sierpiński gasket と呼んだ（図 6.4）．この定義だと原点 O 以外は一つの頂点から 4 本の辺が出ているが，O だけは 2 本の辺しか出ない．O から出発する self-avoiding path は定義によって O に戻ることはないのでこの定義で不都合はないが，単純ランダムウォークでは途中で O に戻れるので，§6.1.1 の F と合同な無限図形を原点に関して二つつなぎ合わせた図形（図 7.1）を考えて，どの頂点も 4 本の辺が出ているようにしたほうが少し便利である．重要な点ではないので記号を節約して，以下では pre-Sierpiński gasket F というときは，こうして §6.1.1 に比べて「2 倍」になった図形を指すことにする．同様に，有限 pre-Sierpiński gasket F_n も 1 辺 2^n の三角形二つを原点でつないだ図形を指すことにする（図 7.2）．また，頂点の名前を図 7.2 のようなここだけの安易な記号を採用する．図 7.2 において，F_1 の頂点を集めた集合を $G_1 = \{O, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta\}$ とおき，外側の頂点を $\partial G_1 = \{a, b, c, d\}$ とおく．

くりこみ群を求めるために，まず §5 の (5.3) に対応して，O から出発する G_1 上の path のうち途中では ∂G_1 を通らず，最後に a に着いたところで止まるものを全て集めた集合を Ω_1 とおき，$w \in \Omega_1$ に対してその歩数を $L(w)$ と書く．§5.1.3 で $\mathbb{Z}$ の場合にみたように，単純ランダムウォークのくりこみ

群はよぶんな重み無しで

$$\Phi_1(z) = \sum_{w \in \Omega_1} z^{L(w)}$$

とおけばよい．これを計算して，§5.2 などと同様に $\Phi_1(x_c) = x_c > 0$ によって固定点を求めれば $\lambda_2 = \Phi_1'(x_c)$ を得ることができる．

原理的には Ω_1 の path を全て用意してそれぞれの長さを数え上げれば Φ_1 を計算できるが，§5.1.3 の $\mathbb{Z}$ の場合と比べると pre-Sierpiński gasket になった分だけ可能な path は複雑になり，上手に数える必要がある．単純ランダムウォークの場合はマルコフ性に相当する性質を用いることになる．このために，途中点までの path の母関数も用意する．すなわち，各 $x \in G_1 \setminus \partial G_1 = \{O, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta\}$ に対して，O から出発して x で止まる $G_1 \setminus \partial G_1$ 上の path （途中で x や O を通ってもかまわない）を全て集めた集合を $\Omega'_{1,x}$ とおき，$w \in \Omega'_{1,x}$ に対してその歩数を $L(w)$ と書いて，

$$\phi_x(z) = \sum_{w \in \Omega'_{1,x}} z^{L(w)}, \ \ x \in G_1 \setminus \partial G_1, \ z \in \mathbb{C},$$

で関数 ϕ_x を定義する（$x = O$ のときは歩数 0 の path (O) も $\Omega'_{1,O}$ に入っていると定義すると以下便利なのでそうする）．

さて，x に来た歩数 1 以上の path は 1 歩前に x の隣のいずれかの点にいて次の 1 歩で x に着くから，

$$\phi_x(z) = \delta_{x,O} + z \sum_{y:x} \phi_y(z), \ \ x \in G_1 \setminus \partial G_1, \ z \in \mathbb{C}. \tag{7.1}$$

ここで，和の $y:x$ は F_1 で x の隣の点（辺で結ばれている点）になっている $y \in G_1 \setminus \partial G_1$ について和をとることを表す．

求めたいくりこみ写像 Φ_1 は図 7.2 より，

$$\Phi_1(z) = z\left(\phi_\alpha(z) + \phi_\zeta(z)\right) \tag{7.2}$$

で与えられるから，(7.1) を未知関数たち ϕ_x について解けばいい．そのためにもう少し便利な関数を導入する．$x \in G_1 \setminus \partial G_1$ に対して複素関数 ψ_x を

$$\psi_x(z) = \sum_{\substack{w \in \Omega'_{1,x}; \\ O \notin \{w(1),\dots,w(L(w)-1)\}}} z^{L(w)}, \ z \in \mathbb{C},$$

で定義する．ϕ_x との違いは，x に達するまでに原点 O に戻らない path だけについて和をとることである．特に ψ_O は O を出発して O に戻る path のうち途中で O を通らないものについての和である．

ϕ_x の定義の和において原点に戻ってくる回数で path を分類することで，

$$\begin{aligned} &\phi_O(z) = 1 + \psi_O(z) + \psi_O(z)^2 + \psi_O(z)^3 + \cdots = \frac{1}{1-\psi_O(z)}, \\ &\phi_x(z) = \psi_x(z)\,\phi_O(z), \quad x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta\}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

よって，ψ_x たちを求めれば ϕ_x たちは求まる．ψ_x たちは，再び最後の 1 歩とその前まで（または最初の 1 歩とそれ以降）に path を分けることで

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha(z) \\ \psi_\beta(z) \\ \psi_\zeta(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ z & 0 & z \\ z & z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\alpha(z) \\ \psi_\beta(z) \\ \psi_\zeta(z) \end{pmatrix}$$

および

$$\psi_O(z) = z\,(\psi_\alpha(z) + \psi_\beta(z) + \psi_\gamma(z) + \psi_\delta(z))$$

となり，また，原点 O をはさんでの対称性から

$$\begin{pmatrix} \psi_\gamma \\ \psi_\delta \\ \psi_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \psi_\beta \\ \psi_\zeta \end{pmatrix} .$$

である．これらを解くことは容易で，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \psi_\alpha(z) \\ \psi_\beta(z) \\ \psi_\zeta(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\gamma(z) \\ \psi_\delta(z) \\ \psi_\eta(z) \end{pmatrix} = \frac{z}{(1+z)(1-2z)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2z \end{pmatrix}, \\ &\psi_O(z) = \frac{4z^2}{(1+z)(1-2z)}. \end{aligned}$$

(7.3) に代入すれば $\phi_O(z) = \dfrac{(1+z)(1-2z)}{1-z-6z^2}$ となるので，(7.3) とともに (7.2) に代入すると

$$\Phi_1(z) = z\,\phi_O(z)\,(\psi_\alpha(z) + \psi_\zeta(z)) = \frac{z^2(1+2z)}{1-z-6z^2}$$

となって，くりこみ写像が計算できた．この式から固定点は $x_c = \dfrac{1}{4}$ と求まる．もっとも，§5.1.3 で $\mathbb{Z}$ の場合にみたように，単純ランダムウォークに対応するくりこみ写像の場合は x_c は 1 歩ごとに隣の点に移る確率だから，pre-Sierpiński gasket では一つの点あたり 4 個の隣の点があるので，この結果は当然期待されることである．そして求める λ_2 は

$$\lambda_2 = \Phi_1'(x_c) = 5$$

と計算できる．

7.2　電気抵抗回路とアインシュタイン関係式

§7.1 で pre-Sierpiński gasket 上の単純ランダムウォークのくりこみ写像 Φ_1 の固定点での微分係数が $\lambda_2 = 5$ であることを実際に定義に従って計算して導いた．しかし，この方法では Φ_1 の固定点での 1 階微分を求めるだけのために関数 Φ_1 を丸ごとあらわに求めていて無駄であり，また，dSG 一般について $\lambda_d = d + 3$ であることをこの計算から読みとるのは（筆者には）難しい．

ここでは，第 I 部 §3.4 で紹介した単純ランダムウォークと電気抵抗回路の対応を利用する方法を [1] に即して簡単に説明する．この方法は dSG への拡張も容易である．電気抵抗を λ_d と結びつけるのはアインシュタイン関係式と呼ばれる公式である．

§7.1 の記号を流用して，原点 O を出発点とする G_1 上の単純ランダムウォークを W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, として，到達時刻 S, T を

$$S = \min\{i \geqq 0 \mid W_i \in \partial G_1\},$$
$$T = \min\{i \geqq 1 \mid W_i \in \{O\} \cup \partial G_1\}$$

で定義する．すなわち，S は W_k が初めて $\{a,b,c,d\}$ に達する時刻，T は W_k が原点 O を出発して以降初めて O に戻るか $\{a,b,c,d\}$ に達するかどちらか早いほうの時刻である．

§7.1 で求めた λ_2 は

$$\lambda_2 = \Phi_1'(x_c) = 4 \sum_{w \in \Omega_1} L(w) 4^{-L(w)}$$

であったが，Ω_1 の定義から，右辺の和は，pre-Sierpiński gasket 上の単純ランダムウォークが原点を出発して b, c, d より先に a に達したという条件下でそのときの歩数（時刻）の平均（期待値）に等しい．対称性から path が a, b, c, d のどの点に初めて達する確率も等しく，どの場合も平均歩数は等しいから，λ_2 は W_k が初めて $\{a, b, c, d\}$ に達する時刻 S の期待値に等しい：

$$\lambda_2 = \mathrm{E}[\, S \,]. \tag{7.4}$$

強マルコフ性を用いてこれを $\mathrm{E}[\, T \,]$ で表す．定義から $S \geqq T$ だから

$$\mathrm{E}[\, S \,] = \mathrm{E}[\, T \,] + \mathrm{E}[\, S - T \,] = \mathrm{E}[\, T \,] + \mathrm{E}[\, S - T; S > T \,]$$

であるが，$S > T$ となるのは W_k が $\partial G_1 = \{a, b, c, d\}$ に達するより先に O に戻る場合，言い換えると $W_T = O$ となる場合である．時刻 T における強マルコフ性から得られる第 I 部 §3.4 の (3.28) から

$$\mathrm{E}[\, S - T; S > T \,] = \mathrm{E}[\, S \,]\,\mathrm{P}[\, W_T = O \,]$$

となるから，(7.4) と合わせて

$$\lambda_2 = \mathrm{E}[\, S \,] = \frac{1}{\mathrm{P}[\, W_T \neq O \,]}\mathrm{E}[\, T \,] \tag{7.5}$$

を得る．これが実質的にアインシュタイン関係式と呼ばれる関係式である．あとはこれを pre-Sierpiński gasket の自己相似性に基づいて見やすい形に変形する．

O を出発した単純ランダムウォークは 1 歩で $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ のいずれかの点に移るが，そのあとは，確率 $\dfrac{1}{2}$ で ∂G_1 の点を hit して止まり，残りの確率で $G_1 \setminus (\partial G_1 \cup \{O\})$ の点に移って 1 歩目の直後と同様の状況になるから，$x = \mathrm{E}[\, T \,] - 1$ について

$$x = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

すなわち，$\dfrac{1}{2}x = 1$ となって，$\mathrm{E}[\, T \,] = x + 1 = 3$ を得る．

次に $W_T \neq O$ ということは $W_T \in \partial G_1$ ということだから，W_k が 1 歩目（時刻 1）以降に点集合 $A \subset G_1$ を hit する時刻を τ_A と書くとき，$\mathrm{P}[\,W_T \neq O\,] = \mathrm{P}[\,\tau_{\partial G_1} < \tau_O\,]$ である．§3.4 の定理 3.16 から，これは F_1 上の各単位長さの辺に大きさ 4 の抵抗をおいた電気抵抗回路における O と ∂G_1 間の有効抵抗 $R_{O\partial G_1}$ の逆数に等しい．これと (7.5) より

$$\lambda_2 = 3R_{O\partial G_1}$$

となるので，あとは $R_{O\partial G_1}$ を計算すればよいが，§3.4 で紹介した電気抵抗回路の計算，特に，(3.37) を用いて図 7.3 にそって計算すると，((3.37) において $r = 1/x_c = 4$ なので）$R_{O\partial G_1} = \dfrac{5}{3}$ となる．よって $\lambda_2 = \dfrac{5}{3} \times 3 = 5$ となり，§7.1 の結果と一致する．

以上の計算を dSG 上の単純ランダムウォークの場合に一般化することは容易である．まず (7.5) は単純ランダムウォークの強マルコフ性しか用いないので任意のネットワークで成り立つ．また，$\mathrm{E}[\,T\,]$ は，pre-Sierpiński gasket のまねをすれば $\mathrm{E}[\,T\,] = d+1$ となることは容易に分かる．実際，一つの単位単体の中で，自分以外の d 個の頂点の内 ∂G_1 に属するものが一つだけあるので，pre-Sierpiński gasket の場合の計算で 2 を d とすればよい（エルゴード定理から d になる，というのが「通」の理解である）．最後に，有効抵抗 $R_{O\partial G_1}$ の計算は，(3.37) を正三角形状の抵抗回路から正 $d+1$ 面体に拡張すればよく，それを実行すれば $\dfrac{d+3}{d+1}$ になるので，$\lambda_d = d+3$ を得る．これから，注 6.2 で紹介した，dSG 上の単純ランダムウォークの変位の指数 $\nu(SRW)_d = \dfrac{\log 2}{\log(d+3)}$ が得られる．

以上の議論は dSG だけでなく種々のフラクタルで成り立つことが証明されている．Nested fractal の場合は [1, Th. 2.5]，p.c.f. self-similar fractal への拡張は [16]，また，本書の程度を越えるが，infinitely ramified fractal の例 Sierpiński carpet（シルピンスキーカーペット）でも証明されている ([2, Prop. 2.2, 2.3], [3, (2.6)])．Infinitely ramified fractal ではくりこみ群が無限次元になることに対応して，単純ランダムウォークといえども問題は飛躍的に難しくなる．

電気抵抗回路による表現はマルコフ性に基づくのでランダムウォークでは

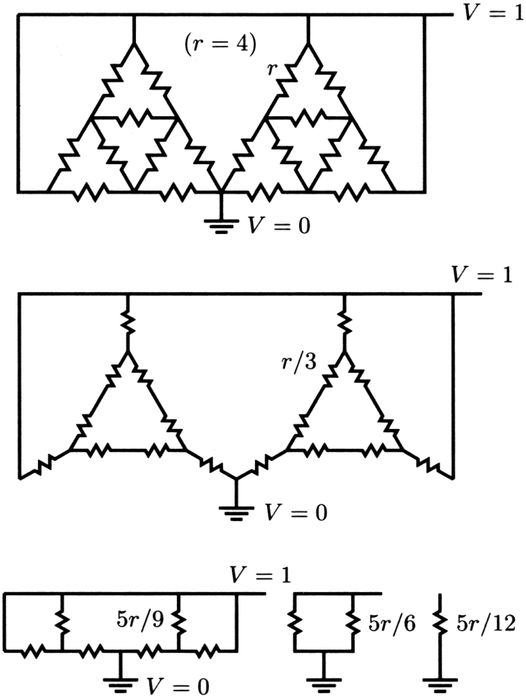


図 7.3

強力な手段となるが，self-avoiding path などではこの節の手法は使えない（アインシュタイン関係式も得られない）．§6.1.4 で強調したように dSG 上の self-avoiding path の変位の指数を導出する一般論は知られていない．マルコフ性がいかに強力な解析的性質であるかが再認識できると同時に，マルコフ性が有効ではない確率連鎖や確率過程を解析する手段としてのくりこみ群の成否にこだわる動機も明確だろう．

7.3 フラクタルにおける等方性の回復

§5 では $\mathbb{Z}$ 上の確率連鎖を考えた．$\mathbb{Z}$ とそれ以外の図形の最初の違いは 1 点から左右以外に他の方向に分岐することである．当然，異なる方向で遷移の

度合いが等しいか違うかという問題が考えられる．たとえば立方格子 $\mathbb{Z}^d$ は d 個の座標軸の方向に関する対称性を確率連鎖が守っているかどうかが問題になりうる．言い換えると，図形が対称性を持つときその上の確率連鎖などの図形上の現象が図形と同じ対称性を持つか否かという問題である．

これは審美的な問題だけではなく，たとえば確率連鎖の問題に即して言えば，可能な漸近的振る舞いが一つか複数あるかという一意性の問題にも関係する．確率連鎖を非対称に定義しても漸近的性質が図形の対称性を必ず持つならば漸近的性質は一意的であり対称性が回復しなければ一意性がない，と考えるのが自然だからである．

この節 §7.3 では電気抵抗回路の合成抵抗の漸近的振る舞いに絞って対称性の回復の問題を概観する．§7.2 でも見たように，電気抵抗回路を調べることはランダムウォークについて調べることをも意味するので重要である．結論は，フラクタル上の電気抵抗回路やランダムウォークについては，ネットワークの持つ対称性（等方性）を持たない場合でも大局的（漸近的）には対称性が回復する．それは $\mathbb{Z}^n$ のような並進対称性を持つネットワーク上の系には存在しない新しい現象である，ということである．

以下では，まず，$\mathbb{Z}^2$ の場合に x 軸と y 軸の間の対称性（等方性）が回復しないことを示し，次に pre-Sierpiński gasket の場合に等方性が回復することを示す．

規則格子では非等方性が回復しない　横方向を x 軸方向，縦方向を y 軸方向とする．1 辺 2^n の正方形 F_n を単位正方形で埋めて，各単位正方形の左または下の辺に，x 軸方向は 1，y 軸方向は r の抵抗をおき，F_n の格子点 G_n の各点で抵抗をつなぐ（図 7.4）．言い換えると，$r > 0$ を定数とし，（仮想）電位分布が $f(x, y)$ のときに F_n が発するジュール熱が

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{y=0}^{2^n-1} \sum_{x=0}^{2^n-1} ((f(x+1, y) - f(x, y))^2 + \frac{1}{r}(f(x, y+1) - f(x, y))^2)$$

で与えられるとする (ランダムウォークに翻訳すると，横方向の 1 歩の遷移確率 $p_1((x, y), (x \pm 1, y))$ が $1/(2+2r)$，縦方向が $p_1((x, y), (x, y \pm 1)) = r/(2+2r)$

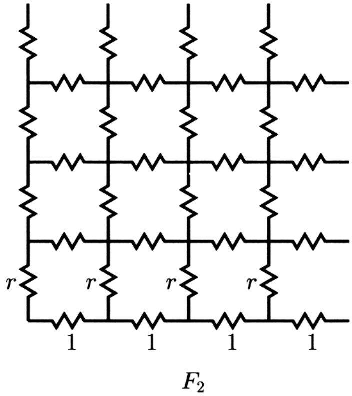


図 7.4

のランダムウォークを考えることに対応する)．そして横方向の有効抵抗 $R_{x,n}$ と縦方向の有効抵抗 $R_{y,n}$ を考える．すなわち，第 I 部 §3.4 の (3.35) において，$A = \{(0,y) \mid 0 \leqq y < 2^n\}$, $D = \{(2^n, y) \mid 0 \leqq y < 2^n\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{x,n}$，$A = \{(x,0) \mid 0 \leqq x < 2^n\}$, $D = \{(x, 2^n) \mid 0 \leqq x < 2^n\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{y,n}$，とする．各場合に実現する電位 v_x , v_y , はそれぞれ次で与えられる．

$$v_x(x,y) = 2^{-n}x,\ v_y(x,y) = 2^{-n}y, \quad (x,y) \in F_n\,.$$

よって (3.35) から，

$$R_{x,n} = 2, \quad R_{y,n} = 2r\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

したがって，

$$H_n = \frac{R_{y,n}}{R_{x,n}} = r\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

すなわち，規則格子 $\mathbb{Z}^2$ に沿って抵抗をおいた抵抗回路では抵抗の縦横に応じて異なる値を与えることで入れた非対称性は，大きなスケールまでそのまま残る（なお，$R_{n,x}$ 自体が $n \to \infty$ で有限で 0 でない極限を持つのは 2 次元の特殊性である．ここでは抵抗の比に興味がある)．

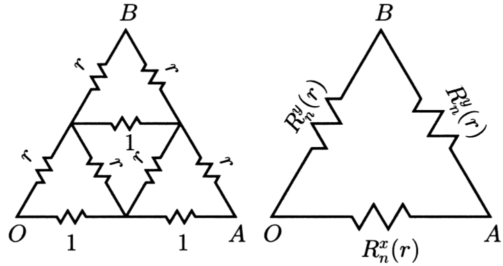


図 7.5

Pre-Sierpiński gasket では等方性が回復する　Pre-Sierpiński gasket に話を進める．左下頂点を $O=(0,0)$，右下頂点を $A=(2^n,0)$，上の頂点を $B=(2^{n-1},2^{n-1}\sqrt{3})$ とする有限 pre-Sierpiński gasket F_n の各単位辺に抵抗を並べた回路網を考えて，O, A, B で測定を行う（図 7.5）．x 軸方向に並んだ抵抗を大きさ 1 とし，それ以外の ±120° 方向に並んだ抵抗は大きさ r とする（一般化して 3 方向とも異なる値にとっても最後の結論は変わらないことが分かっている）．

$\mathbb{Z}^2$ の場合にそのままならうならば (3.35) において，$A=\{O\}$, $D=\{A\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{x,n}$（横方向の有効抵抗），$A=\{O\}$, $D=\{B\}$, としたときの $R(A,D)$ を $R_{y,n}$（斜め方向の有効抵抗）を考えることになるが，この抵抗回路網は OA, OB, AB に適当な抵抗を置いてつないだ三角形回路網と等価（O, A, B で測る限り区別できない）になることから，以下の計算を少し見やすくするために，この等価回路の，OA の抵抗値を $R^x_n(r)$, OB と AB の抵抗値を $R^y_n(r)$ とおくことにする．正三角形の各辺の抵抗値が a, b, c のとき，BC, CA, AB 間の有効抵抗はそれぞれ $a(b+c)/(a+b+c)$, $b(c+a)/(a+b+c)$, $c(a+b)/(a+b+c)$ になることは §3.4.2 で紹介した直列接続や並列接続を用いた計算練習で導けるので，どちらで考えても本質的な違いはない．

この回路網の抵抗の非等方性（Sierpiński gasket の持つ 120° 回転対称性を抵抗値が満たさないこと）をはかる量として，比

$$H_n(r) = \frac{R_n^y(r)}{R_n^x(r)} \tag{7.6}$$

を導入する．定義から $R_0^x(r) = 1$, $R_0^y(r) = r$ なので $H_0(r) = r$ である．

§3.4.2 で紹介した電気回路の初等的な計算，特に (3.36) の star–triangle 関係式によって，n に関する漸化式

$$\begin{aligned} R_{n+1}^x &= \frac{2R_n^x R_n^y (2R_n^x + 3R_n^y)(3R_n^x + 2R_n^y)}{({R_n^x}^2 + 6R_n^x R_n^y + 3{R_n^y}^2)(R_n^x + 2R_n^y)}, \\ R_{n+1}^y &= \frac{R_n^y(2R_n^x + 3R_n^y)}{R_n^x + 2R_n^y}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

を得て，

$$H_{n+1}(r) = g(H_n(r)), \quad g(x) = \frac{3x^2 + 6x + 1}{4x + 6}, \tag{7.8}$$

が $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して成り立つことが分かる． (7.8) は pre-Sierpiński gasket 上の非等方的ランダムウォークの等方性に関するくりこみ群である．

(7.8) の g の具体形から，$x = 1$ は g の $x > 0$ における唯一の固定点 ($g(1) = 1$) であり，$r > 0$ がどんな実数であろうと，

$$\lim_{n \to \infty} H_n(r) = 1 \tag{7.9}$$

となることが分かる．非等方的な電気抵抗を持つ素材を用いても，十分に大きな pre-Sierpiński gasket の全体としての電気抵抗は等方的になることが分かった．言い換えると，電気抵抗が Sierpiński gasket の対称性を満たさないような材質を選んで pre-Sierpiński gasket を作っても，細かい構造を入れていくと，対称性が回復する．

以上は全抵抗についての結論である．一つ一つの抵抗についてはその両端間の電位差を計ると r 依存性はどんなに系を大きく（n を大きく）しても残る．他方で，n が大きいときの総抵抗がだんだん r によらなくなる，というのが (7.9) の内容（等方性の回復）である．この一見奇妙な現象は，遠く離れた点の間（間にたくさん抵抗が入っている列の両端）で電位差を計ると，大きさ r の抵抗と大きさ 1 の抵抗が入り乱れて，ならされてしまう，ということである．

$\mathbb{Z}^2$ の場合に具体的に確かめたようにこのような等方性の回復現象は並進対称な図形ではおきない．そのためかこれまで強く意識されてこなかったように思われる．しかし，電気的な非等方性を持つ材質は特殊な物質ではないし，等方的な材質でもある方向に長くした図形を考えれば等方性を壊すことができるので，特殊な問題とは言えない．

(7.8) からは等方性の回復の速さ（指数）も得られる．実際，$H_n(r) \gg 1$ が満たされている間は，近似的に

$$\begin{aligned} &R^x_{n+1}(r) \doteqdot 2R^x_n(r), \qquad R^y_{n+1}(r) \doteqdot \frac{3}{2}R^y_n(r) \\ &H_{n+1}(r) \doteqdot \frac{3}{4}H_n(r), \end{aligned} \tag{7.10}$$

となり，$H_n(r)$ が 1 に近いときは

$$\begin{aligned} R^x_{n+1}(r) &\sim R^y_{n+1}(r) \sim (5/3)R^x_n(r), \\ H_{n+1}(r) - 1 &\sim \frac{4}{5}(H_n(r) - 1), \end{aligned}$$

となる（$\lim_{n\to\infty} H_n(r) = 1$ なので n が大きくなると $H_n(r) \gg 1$ が満たされなくなるから，(7.10) を漸近形として正確に書くためには r を n とともに適切に大きくする極限 (scaling limit) を用いて書かないといけないが，再帰式の具体形があるので難しくない [4]）．

$H_0(r) \ll 1$ のときはいきなり $H_1(r) \doteqdot 1/6$ まで跳ね上がるが，これは 3 辺の三つの抵抗のうち二つが抵抗 0 という状況はくりこみ群の固定点でないことを意味する．これに対して 1 方向だけ抵抗が小さいのは 1 次元鎖状に直列に抵抗が並んでいる状況なので decimation でその形が保存される（固定点である）．したがってそのような状況からの等方性の回復は指数関数的になる．

くりこみ群で出発点が違うということは，対応する現実の系で局所的（小さい距離）には大きく違う系を意味し，くりこみ群の軌道が同じ固定点に収束するということは，現実の系で大局的（遠く離れた点の間，またはたくさんの自由度での平均）には似た現象が起きている，ということである．この状況を統計力学では universality（普遍性）の成立，確率過程論では invariance principle（不変原理）の成立，と呼ぶ（Universality や invariance principle

と呼ばれる現象全てがくりこみ群の描像によって説明されるべきであると主張しているのではない．それらの中にくりこみ群の描像が自然なものがある，という意味である）．

3 方向とも抵抗値が異なる場合に (7.7) を拡張することも難しくはない．結果だけ書いておく [4] と，

$$R_{n+1}^a = \frac{(4K + R_n^a + R_n^b + R_n^c)R_n^a(R_n^b + R_n^c)}{(K + R_n^b + R_n^c)(R_n^a + R_n^b + R_n^c)} \tag{7.11}$$

となる．ここで，

$$K = \frac{(R_n^a + R_n^b)(R_n^b + R_n^c)(R_n^c + R_n^a)}{2(R_n^a R_n^b + R_n^b R_n^c + R_n^c R_n^a)}$$

とおいた．これから等方性の回復を証明することも難しくはない．

等方性の回復があると，漸近 1 次元拡散と呼ぶ連続確率過程（連続関数上の確率測度）が構成できる．ブラウン運動のような自己相似な確率過程と違って，付け加える構造がスケールごとに変化する確率過程である．くりこみ群に不安定な固定点があれば，そのような確率過程が構成できるという描像に基づいて発見された．詳しいことは論文を参照していただきたい [25, 26, 31]．

8章
書ききれなかったことについて

本書の本文を終えるにあたって，くりこみ群について書ききれなかった可能性の中から，本書の次の段階となるべき内容を中心にとりとめもないことに筆をすべらせておくことをお許しいただきたい．

くりこみ群の作用するパラメータ空間の次元　§5 では $\mathbb{Z}$ 上の path や確率連鎖を考察して，path の漸近的性質，たとえば重複対数の法則，を非常に多くのマルコフ性を持たない確率連鎖に対して統一的に証明した．そこではくりこみ群 (5.15) は 1 変数，すなわち 1 次元力学系であり，定理 5.9，特に，(5.38) から見てとれるように，くりこみ群の固定点の近傍の解析で path の漸近的性質を導くことができた．

しかし，この議論を $n \geqq 2$ に対する $\mathbb{Z}^n$ の上の path に適用しようとすると $\mathbb{Z}$ の場合に比べて極めて難しくなることが，少し考えるとすぐに分かる．§5.1.1 で導入した decimation を単純に $n \geqq 2$ に対する $\mathbb{Z}^n$ の上の path に拡張しようとすると，たとえば path が $(2\mathbb{Z})^n$ の点（座標成分が全て偶数の点）を通ったときだけを記録することで $(2\mathbb{Z})^n$ の path を対応させたくなるが，$n = 1$ では遠くに達する path は必ず途中で ± 2 のいずれかの点を通るのに対して，$n \geqq 2$ では近くにある $(2\mathbb{Z})^n$ の点を通ることなく遠くに達することが容易にできる（図 6.1）．別の言い方をすると，$\mathbb{Z}$ 上の path を遠くで捕まえる（漸近的性質を調べる）ためには，十分大きな k に対して $\pm 2^k$ の 2 点に「見張り」をたてればよい．原点を含むどんなに大きな領域でもそれを無限遠点と切り離すのに定数 2 以下の点ですむ．これに対して，$n \geqq 2$ の場合に $\mathbb{Z}^n$ 上の path を遠くで捕まえようとするほど必要な見張りの数が増えていく．

前者の性質を持つ図形（あるいはネットワーク）を finitely ramified，後者の性質を持つ図形（あるいはネットワーク）を infinitely ramified と呼ぶこ

とがあるが，$\mathbb{Z}$ のように finitely ramified な図形上の path に対しては，対応するくりこみ群は有限個の変数で再帰式が閉じる（有限次元空間の上の力学系として記述できる）のに対して，$n \geqq 2$ の場合の $\mathbb{Z}^n$ のように infinitely ramified な図形上の path に対しては対応するくりこみ群が無限次元になる．このことは decimation という特定の方法からくることではなく，infinitely ramified な場合の根本的な難しさである．

Canonical surface とくりこみ群の大局的な軌道解析　くりこみ群は正係数の級数による力学系を変数が非負値のところで考えるので，1 次元の場合は力学系としての軌道解析はやさしい．くりこみ群が 1 より大きい有限次元の力学系になる例として §6 と §7 では Sierpiński gasket およびその一般次元化としての d 次元ガスケットの上の self-avoiding path とランダムウォークを考えた（図形の次元とくりこみ群の次元は全く別のものなので，混乱のないよう注意してほしい）．そこで考察した問題は，考察対象の確率連鎖に対応するパラメータ空間の点（くりこみ軌道の初期値）の集合（この集合をくりこみ群の理論では canonical surface と呼ぶ）と path の漸近的性質を与える固定点が離れているため，くりこみ群の力学系としての大局的な軌道解析（固定点近傍だけでない，という意味で）を必要とした．Canonical surface と固定点近傍をつなぐ大局的な軌道がすなおな形であればくりこみ群解析が有効になる，ということを §6 において d 次元ガスケット上の self-avoiding path に関して明らかにした．しかし，大局的な軌道がすなおであるためにどのような条件が必要かという点は未解決であり，現状ではモデルごとに個別に軌道解析を行わなければならない [21, 23, 24, 27, 29]．d 次元ガスケット上の self-avoiding path の漸近的性質の一般論は未解決である．一般に離散力学系では有限次元であってもカオスのように複雑な挙動を示す可能性があり，くりこみ群の大局的な軌道がすなおなものであることを示す一般的な方法は知られていない．

扱いやすい無限次元空間　上に注意したように，$n \geqq 2$ に対する $\mathbb{Z}^n$ の上の path の場合は，対応するくりこみ群は無限次元力学系になる．本書では全く

触れなかったが，くりこみ群は元々スピン系の平衡系統計力学において考えられた概念である（§A.3 を参照）．$\mathbb{Z}^n$ $(n \geqq 2)$ 上のスピン系についてはくりこみ群が一般に無限次元力学系になる．数学的に厳密な解析はほとんどガウス固定点の近傍に限られていて，それも極めて難しい [12, 13].

スピン系のくりこみ群については，hierarchical model と呼ばれるくりこみ群向きのモデルが研究されている [8, T19]. Hierarchical model もくりこみ群が無限次元空間の上の力学系になるが，滑らかな 1 変数関数の集合という「良い」無限次元空間で記述できる．ガウス固定点近傍での詳しい解析 [9, 10, 11] だけでなく，ガウス固定点から離れている Ising model を初期値 (canonical surface) とした場合の軌道解析（臨界点，すなわち軌道が固定点に収束する初期値の存在）も成功している [17]. つまり，無限次元空間の上の力学系と言っても難易があって，比較的やさしい無限次元の空間の上のくりこみ群がくりこみ群研究の次の段階の課題になりうる．

§7 で調べたフラクタルにおける等方性の回復はくりこみ群の大局的な軌道解析によってフラクタル上のランダムウォークに固有の現象を見いだしたものである．この現象については，Sierpiński carpet に（Sierpiński gasket の場合に比べれば少し弱い結果ながら）拡張できる [4, 5]. Sierpiński carpet は infinitely ramified fractal の代表例で，対応するくりこみ群は無限次元の力学系になるが，等方性の回復現象にとってもっとも重要な有限個の次元に制限して上下からの評価を行うことで特徴的な性質を抽出し得た（そのような評価が可能なのはマルコフ性に由来する解析的な手法による）．

くりこみ群の不変部分集合　個々のモデルにおける成功例の蓄積はあっても，くりこみ群の解析の一般論に至るにはまだ大きな問題が山積している．くりこみ群が有効であるためにもっとも必要な点は，大局的な軌道がすなおになる理由であろう．統計力学のイメージで考えると，パラメータの正値性は系の物理的な安定性にとって決定的に重要なので，くりこみ群の軌道はパラメータ空間全体ですなおであるとは考えられず，canonical surface と漸近的性質に効く固定点を含むくりこみ群の不変部分集合の中ですなおである，という主張であるべきである．そのような適切な不変部分集合を見つけるこ

とが重要になるだろう．§6 の例では (6.29) の Ξ_d がそのような不変部分集合である．その外側には複数の固定点があり，軌道の様子は Ξ_d の中のようにすなおではないことは具体的な例についてあらわに計算すると分かる．

さらに想像をたくましくすると，くりこみ群がもっとも典型的に有効になるのはそのような不変部分集合が座標に関して素朴な「大小関係」をくりこみ群が保存する，という形で指定されているとき（canonical な座標）ではないかと思う．さらに，（一般には「たちの悪い」）無限次元空間の中から，「本質的な有限次元」が canonical な座標の中の主要な有限個の座標に摂動を加えることで得られることを期待する．その上で主要な有限次元の中の大局的な軌道解析がくりこみ群解析の本質となるのであろう．しかし，これらの想像を正確にすることは現在の筆者の及ばないところである．

普遍性　$n \geqq 2$ に対して $\mathbb{Z}^n$ の上の確率連鎖（やスピン系）におけるくりこみ群が現時点で十分成功していないことを承知の上で想像をたくましくして，§5.6.3 の self-repelling walk，すなわち，確率連鎖の漸近的性質を決める指数を単純ランダムウォークと self-avoiding walk で連続的に内挿する問題が $n \geqq 2$ でどうなるかを推測してみる．$\mathbb{Z}$ 上では指数の連続的内挿は §5.6.3 のようにくりこみ群を用いれば困難なことではない．他方，$n \geqq 2$ で 1 歩ごとに隣に移る確率連鎖では，単純ランダムウォークと self-avoiding walk を内挿するどころか，両者以外の指数を持つ確率連鎖の可能性すら知られていないようである．くりこみ群の観点からは，上に述べたように $n \geqq 2$ ではくりこみ群のパラメータ空間は無限次元になる．すなわち，くりこみ群の固定点に対応する確率連鎖は 1 歩で遠くに飛ぶ可能性を許すだろう．そのような，遠くに飛ぶことのできる確率連鎖の族を考えれば指数の内挿は可能であろうが，問題はそのような確率連鎖と等しい指数を持つ確率連鎖が 1 歩で隣にのみ移るもので見つかるか，ということになる．$\mathbb{Z}$ 上では 1 歩で隣にのみ移る確率連鎖でくりこみ群が閉じるが，$\mathbb{Z}^n$ $(n \geqq 2)$ 上ではそうならないので，無限次元空間の中の極めて薄い canonical surface を初期値とすることになる．これが原因になって $n \geqq 2$ では可能な漸近指数も制約が強い可能性はある．$\mathbb{Z}^n$ 上のスピン系の臨界指数に関する普遍性も，このような意味で理解すべき

部分があるように思う．くりこみ群の数学を作るためには普遍性という言葉でくくってきた物理的な議論を掘り下げて，より精密に分類する必要が生じるだろう．

曖昧にしておくには重要すぎる　くりこみ群による系の漸近的性質の導出は，理論物理学では20世紀に標準的な考えかたとして確立している [T20]．くりこみ群は複雑（微分不可能，ランダム）な図形の性質を解析する方法として誰もが注目するが，数学の解析学としての発展は進んでいない．3次元イジング模型の臨界指数も4次元QCDの連続極限も数学的に得られないまま半世紀過ぎたということは，野心的な立場とは別に，簡単な模型から数学的な可能性を地道に研究する立場の可能性を示唆する．

本書の特に§5で目標としたのは，くりこみ群の物理的な描像に内容的に対応する数学的に厳密な定義や定理を（物理的に自明でない内容を保ちつつ）できるだけ簡単な形で，しかしモデルに対する物理的な要請を行わずに与えられた枠組みの中で一般性を保ったまま，提示することである（一般性を保つのは単に数学的興味ではない．理論物理学でモデルを立てる際に解析しやすいように理想化を行うが，それが実験事実を説明するためには，実験条件に伴う制御不能なモデルの変形（実験誤差）に対して結論が大きく変わらないという理論の一般性を暗黙に期待している）．

くりこみ群の描像は，時間を（歩数を増やす方向に）追ってながめるのではなく，大まかな構造に細かい構造を付け加えていく（結果として歩数は増える）ことで，長いpathの漸近的な振る舞いをながめるという視点の転換が出発点である．その視点からpathがぎざぎざしていることに伴う結果（特徴的な指数，たとえば変位の指数や重複対数の法則）が証明できる．Pathを特徴づける指数がくりこみ群の解析だけで決まることは，くりこみ群解析がこれらの指数の由来に適合していて「由緒正しい」解析であることを示唆する．

微分方程式が軌道を定め，偏微分方程式や確率微分方程式が古典場の運動や確率過程を定めるように，くりこみ群が確率過程（将来的には量子場）の存在とその性質を定める数学となることを期待することを，本書の§5で「おもちゃ」のモデルを通して具体的に示した．特に確率微分方程式（あるいは

遷移確率密度を通して偏微分方程式）が定めてきた確率過程はマルチンゲール性またはマルコフ性を必要としていた（したがって「指数」は本質的に 1/2 であった）のに対して，これまで扱えなかった非マルコフ的な確率過程に解析学の地平を広げることを期待する．

描像の透明性とは裏腹に厳密な解析の一般論を実行することは現時点では満足にできているとは言えない．曖昧な議論で納得するには重大すぎる主張である．くりこみ群は元の確率連鎖の複雑な漸近的振る舞いを確率連鎖の性質によらずに統一的に解析しようというのだから，簡単な一般論が直ちに見つからないこと自体は不思議はないかもしれない．他方，もし，くりこみ群が数学的解析手段として有効ならば，そのような一般論がいつかは見いだされなければならない．

くりこみ群の数学的研究は前途が大きく開かれている．

補　　遺

ここでは §5 と §6 のいくつかの主定理の証明を行う．

§A では指数型のタウバー型定理を紹介する．タウバー型定理は母関数の族の振る舞いから対応する確率測度の族の振る舞いを導く定理で，§B と §D の結果を得るのに用いられる．また，指数型のタウバー型定理は統計力学と呼ばれる理論物理学の分野で扱われる熱力学極限によって，熱力学と呼ばれる先に知られていた分野の関係式を再現する定理でもある (§A.3)．

§B と §D ではそれぞれ §5 と §6 において歩数の母関数に対するくりこみ群解析，特に平均歩数でスケールされた母関数が収束すること，を証明し，さらにタウバー型定理によって歩数分布の漸近的振る舞いを得る．§B と §D の主な違いは，前者が 1 次元 (1 変数)，後者が多次元（多変数）ということと，前者はくりこみ群の固定点直上に対応する解析なのに対して，後者はくりこみ群の固定点でない軌道上で母関数の列の収束を議論する点にある．

§C は §5 において，$\mathbb{Z}$ 上の path の場合に §B で調べたくりこみ群にとって自然な path 集合上の確率測度から確率連鎖（無限長 path の集合上の確率測度で最初の k 歩を決めた path の集合が可測なもの）を得る手続き（拡張定理）の証明である．

§E は §D で証明した歩数分布の振る舞いから §6 の self-avoiding path の変位の指数などの漸近的性質を証明する．

A　指数型のタウバー型定理

くりこみ群の振る舞いから歩数分布の漸近形を得る定理 5.9(ii) の証明にはタウバー型定理を用いる．本書で用いるのは指数型のタウバー型定理と呼ばれるもので，大偏差値原理（入門的な紹介は [T1, §1.5] を参照）との関連でも重要である．指数型でない，元々のタウバー型定理およびアーベル型定理も，べき型か指数型かの違いであって，理論の精神は同様だが，定理の具体的内容や証明は大きく違う．本来のタウバー型定理への入門には，たとえば [T16, 第 7 章] を参照していただきたい．タウバー型定理は特性関数の諸性質とともに確率論の基礎事項なのでこの節 §A で紹介しておく．

きちんとした話に入る前にこの節の目標を概観しておく．$[0,\infty)$ 上のボレル確率測度の族 P_u, $u>0$, に対して極限

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log \mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,],\ \xi>0, \tag{A.1}$$

と母関数に関する極限

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,],\ s>0, \tag{A.2}$$

を考える．前者が存在（収束）するときに後者が存在する，という定理をアーベル型定理，後者が存在（収束）するときに（付随的な条件の下で）前者が存在する，という定理をタウバー型定理という．

アーベル型定理・タウバー型定理とは，元々は，級数の有限部分和

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

の $n\to\infty$ 極限の振る舞いと重み（収束因子）つき無限和

$$T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,\ |x|<1,$$

の収束因子を取り除く極限 $x\to 1$ の振る舞いの関係を与える（一方の収束・発散から他方の収束・発散を結論する）定理だが，現在では広い意味に使う．多くの場合，アーベル型定理はほぼ自動的に成り立つのに対して，タウバー型定理は本質的な付加的な条件がないと成り立たない．

(A.1) と (A.2) の関係を「指数型」の定理と呼ぶのは，両者の極限が存在するときに，たとえば，

$$\varphi(\xi) = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,],\ \xi>0,$$

とおくと

$$\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \fallingdotseq e^{\varphi(\xi)u} \tag{A.3}$$

のようにパラメータ u に関する増大度（または減少度）が指数的であることを指す．指数型のタウバー型定理では (A.1) の極限 $\varphi(\xi)$ と (A.2) の極限がルジャンドル変換の関係にある．大ざっぱに説明すると，(A.3) から

$$\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-u(s\xi-\varphi(\xi))}u\varphi'(\xi)d\xi$$

が期待できるが，u が大きいと $s\xi-\varphi(\xi)$ が小さい ξ が主に効くので，

$$-\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \fallingdotseq \inf_{\xi>0}(s\xi-\varphi(\xi)) \tag{A.4}$$

を得るだろう．これをきちんと書いたものがアーベル型定理である．(A.4) の右辺に登場した s の関数は φ のルジャンドル変換と呼ばれる（§A.1 の (A.12) 参照）．ルジャンドル変換は上に凸な関数であることが分かるが，(A.4) の左辺は s について上に凸な関数なので，P_u に対して特別な条件がなくても矛盾なく (A.4) が成り立つことが期待できる．(A.4) の左辺が上に凸であることを大ざっぱに見るには，s で 2 階微分して微積分の順序を自由に交換できることを仮定すると

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(-\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]\right) = -\frac{1}{u}\left\langle (u\xi-\langle u\xi\rangle)^2\right\rangle \leqq 0$$

を得ることを見ればよい．ここで

$$\langle\cdot\rangle = \frac{\int_0^\infty \cdot e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]}{\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]}$$

とおいた．タウバー型定理は以上の逆になるので，(A.1) を (A.2) のルジャンドル変換で評価することになる．(A.2) と違って (A.1) は ξ の凸関数になる保証がないので，精密な評価が得られるのは P_u に対して何らかの仮定のある場合に限ることも想像がつく．

以上の考察から，指数型のタウバー型定理の紹介のために凸関数とルジャンドル変換の説明 (§A.1) から始める必要があることが分かる．

A.1　凸関数とルジャンドル変換

関数 $f:\ (0,\infty) \to [-\infty,\infty) = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ が上に凸な (convex) 関数であるとは，恒等的に $-\infty$ ではなくて，

$$f(tx+(1-t)y) \geqq tf(x)+(1-t)f(y),\ 0 \leqq t \leqq 1,\quad x,y\in(0,\infty), \tag{A.5}$$

を満たすことをいう．上に凸というときは (A.5) の等号，すなわち直線の場合，を許す．また，$-\infty \geqq -\infty$ も許す．定義域は $(0,\infty)$ でなくても，$\mathbb{R}$ やその任意の区間でかまわない．

命題 A.1　$f:\ (0,\infty) \to [-\infty,\infty)$ を上に凸な関数とするとき以下が成り立つ（図 A.1）．

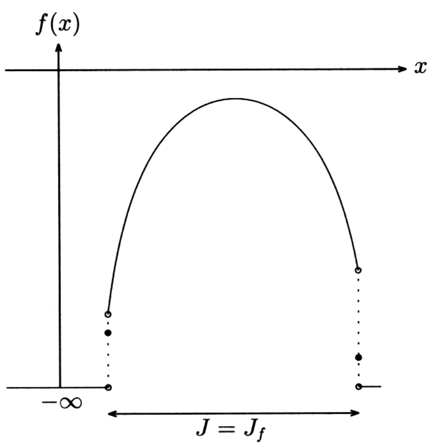


図 A.1

(i) f は $(0,\infty)$ の区間 $J \subset (0,\infty)$ で実数値をとり，$(0,\infty)\setminus J$ では $-\infty$ である（$J=(0,\infty)$ かもしれない）．

(ii) x が J の中から点 $y \in \overline{J}$（J の閉包）に近づくとき

$$\varliminf_{\substack{x\to y;\\ x\in J}} f(x) \geqq f(y). \tag{A.6}$$

(iii) f は J の内部 J^o で連続関数である．

(iv) 各 $x \in J$ に対して

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad y\in(0,\infty)\setminus\{x\},$$

は y について非増加．

(v) 各 $x \in J^o$ に対して

$$f(y) \leqq f(x) + a(y-x),\quad y\in(0,\infty), \tag{A.7}$$

を満たす実数 a がある．そのような a を（一つ以上あるときはそのうちの任意の一つを）$a(x)$ とおくと，$a(x)$ は x について単調減少する．

(vi) 各 $x \in (0,\infty)\setminus\overline{J}$ に対して，任意の実数 b に対して実数 a が存在して

$$f(y) \leqq b + a(y-x),\quad y\in(0,\infty). \tag{A.8}$$

◇

証明　(i) (A.5) から

$$x \leqq z \leqq y \text{ ならば } f(z) \geqq \max\{f(x), f(y)\} \tag{A.9}$$

だから，$f(x) > -\infty$ なる x は連結集合，すなわち区間をなす．

(ii) $f(y)=-\infty$ ならば自明に成り立つから $f(y) > -\infty$ すなわち $y \in J$ とする．結論を否定して，ある $\delta > 0$ に対して

$$f(y) - f(x_n) \geqq \delta,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{A.10}$$

を満たすような，y に収束する数列 $x_n, n \in \mathbb{N}$, が J の中に存在するとする．必要なら部分列をとることで最初から $\{x_n\}$ は単調であるとしてよい．(A.9), (A.10) から $f(x_n) \geqq f(x_1)$ なので

$$\delta \leqq f(y) - f(x_n) \leqq f(y) - f(x_1),\quad n\in\mathbb{N}.$$

$\{x_n\}$ は y に収束するようにとったので，$x_{n_0} - y = t(x_1 - y)$ となるような n_0 と $0 < t < \dfrac{\delta}{f(y)-f(x_1)}$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)y) &= f(x_{n_0}) \\ &\leqq f(y) - \delta < f(y) - t(f(y) - f(x_1)) = tf(x_1) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

これは (A.5) に矛盾する．よって (A.10) を満たす $\{x_n\}$ はとれないことが分かる．

(iii) f が $y \in J^o$ で不連続とすると，ある $\delta > 0$ に対して $|f(y) - f(x_n)| > \delta$, $n \in \mathbb{N}$, が成り立つような，y に収束する数列 x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, が J^o の中に存在する．(ii) から $f(x_n) - f(y) \geqq \delta$, $n \in \mathbb{N}$, としてよく，(ii) と同じ議論から x_n は単調に y に収束するとしてよい．y をはさんで $\{x_n\}$ と反対側にある点 $z \in J^o$ をとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$t_n = \dfrac{z - y}{z - x_n}$ とおくと，$0 < t_n < 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$ であって

$$\begin{aligned} &t_n f(x_n) + (1 - t_n) f(z) \\ &\quad \geqq t_n(f(y) + \delta) + (1 - t_n) f(z) = f(y) + \delta + (1 - t_n)(f(z) - f(y) - \delta). \end{aligned}$$

$(1 - t_n)(f(z) - f(y) - \delta) > -\delta$ を満たすように n を十分大きくとれば

$$t_n f(x_n) + (1 - t_n) f(z) > f(y) = f(t_n x_n + (1 - t_n) z).$$

これは (A.5) に矛盾する．よって f は J^o で連続である．

(iv) (A.5) から

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ ならば } f(x_2) \geqq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1).$$

よって $x_1 < x_2 < x_3$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\geqq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \quad (x_1 \in J \text{ のとき}) \\ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &\geqq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad (x_2 \in J \text{ のとき}) \\ \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} &\geqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \quad (x_3 \in J \text{ のとき}). \end{aligned}$$

よって $x \in J$, $y, y' \neq x$, $y \leqq y'$ ならば（x と y, y' の間の大小関係に関係なく）

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqq \frac{f(y') - f(x)}{y' - x}.$$

(v) (iv) から $x \in J$ に対して $\inf_{y<x} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqq \sup_{z>x} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$ であるが，さらに $x \in J^o$ ならば両辺とも実数値になるから，

$$\inf_{y<x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqq a \geqq \sup_{z>x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

を満たす実数 a が存在する．$y < x$ ならば左辺から，$y > x$ ならば右辺から (A.7) が成り立つ．またこの式から $a = a(x)$ の単調性は明らか．

(vi) J が 1 点ならば容易だから J は内点を持つとして，J の端点を $\alpha < \beta$ とする．$y \notin J$ ならば (A.8) の左辺が $-\infty$ となって (A.8) は成り立つので，$y \in J$ の場合について証明すれば十分である．$x \in (0, \infty) \setminus \overline{J}$ ならば $x < \alpha$ または $x > \beta$ である．$x > \beta$ でも同様に証明できるので，以下 $x < \alpha$ の場合を証明する．

$z \in J^o$ を任意にとって固定する．α は J の左側の端点だから $\alpha < z$．(v) から

$$f(y) \leqq f(z) + a_z(y-z), \quad y \in (0,\infty),$$

を満たす $a_z \in \mathbb{R}$ が存在する．

$b < f(z) + a_z(x-z)$ ならば $a = \dfrac{f(z)+a_z(\alpha-z)-b}{\alpha-x}$ (>0) とおくと，$y \in J$ のとき $y \geqq \alpha > x$ だから，

$$b + a(y-x) - (f(z) + a_z(y-z)) = a(y-\alpha) \geqq 0.$$

よってこの a に対して

$$b + a(y-x) \geqq f(z) + a_z(y-z) \geqq f(y), \quad y \in J. \tag{A.11}$$

他方 $b \geqq f(z) + a_z(x-z)$ ならば $a = a_z$ とおくとやはり (A.11) が成り立つ．結局，任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して (A.8) を満たす a が存在する． □

恒等的に $-\infty$ ではない関数 $f\colon\ (0,\infty) \to [-\infty,\infty)$ に対して

$$g(s) = \inf_{x\in(0,\infty)} (sx - f(x)), \quad s \in (0,\infty), \tag{A.12}$$

で定義される関数 $g\colon\ (0,\infty) \to [-\infty,\infty)$ を f のルジャンドル変換という（図 A.2）．inf で定義されているので g の値は $-\infty$ を許す（f は恒等的に $-\infty$ ではないから $g = \infty$ にはならない）．

次のルジャンドル変換に関する基礎性質（定理 A.2）は [33, Theorem 2.2] と [T21, §H] をまとめたものである（完全のために J の端点に関する結果も含めたがあとでは使わない）．

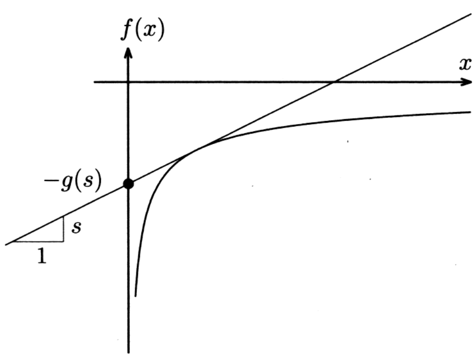


図 A.2

定理 A.2　関数 $f:\ (0,\infty)\to[-\infty,\infty)$ のルジャンドル変換 (A.12) のルジャンドル変換を

$$g^*(x)=\inf_{s\in(0,\infty)}(sx-g(s)),\quad x\in(0,\infty), \tag{A.13}$$

とおく．このとき以下が成り立つ．

(i) g は上に凸である．したがって特に命題 A.1(iii) から，値が実数 $(g(r)>-\infty)$ になる区間 $J_g\subset(0,\infty)$ の内部 J_g^o で連続関数である．

(ii) g は $\overline{\lim_{r\to s}}\, g(r)\leqq g(s)$, $s\in(0,\infty)$, を満たす (upper semicontinuous)．したがって，特に，$g(s)=-\infty$ のときは $\lim_{r\to s} g(r)=-\infty$ の意味で連続であり，また，命題 A.1(ii) と合わせると J_g の境界において J_g の中から近づくとき連続 ($\lim_{r\to s;\, r\in J} g(r)=g(s)$) である．

(iii) $f(x)\leqq g^*(x)$, $x\in(0,\infty)$．

(iv) f が上に凸ならば，ルジャンドル変換を 2 回行うと，f が実数値をとる区間 J_f の端点 ∂J_f を除いて f に戻る．すなわち，

$$f(x)=g^*(x),\quad x\notin\partial J_f.$$

したがって特に，(ii) と合わせると，J_f の閉包 $\overline{J}_f$ で f が連続ならば，ルジャンドル変換を 2 回行うと全ての点で f に戻る．言い換えると，上に凸な関数 f がある関数のルジャンドル変換になっていることと，J_f の閉包 $\overline{J}_f$ で f が連続であることが，同値である．

(v) $\tilde{f}$ が上に凸で $f(x)\leqq\tilde{f}(x)$, $x\in(0,\infty)$, ならば $\tilde{f}(x)$ が有限の値をとる区間を $\tilde{J}$ と書くとき

$$g^*(x)\leqq\tilde{f}(x),\ x\notin\partial\tilde{J}. \tag{A.14}$$

(vi) f が上に凸ならば，$x\in J_f^o$ に対して (A.7) を満たす a をとるとき，

$$ax-g(a)=f(x) \tag{A.15}$$

を満たし，さらに，$sx-g(s)$ は $s\in J_g^o$ の関数として $s<a$ で非増加，$s>a$ で非減少である．　◇

注 A.3　関数 f に対して，各点で f 以上の値をとる凸な関数のうち最小のもの，すなわち，以下の性質を持つ関数 h を f の concave hull という．

(i) h は上に凸．
(ii) 各点で $f\leqq h$.
(iii) $\tilde{f}$ が上に凸，かつ，各点で $f\leqq\tilde{f}$ ならば，各点で $h\leqq\tilde{f}$.

したがって定理 A.2 は，f にルジャンドル変換を 2 回行って得られた関数の値が有限になる区間の内部 J_f^o で f の concave hull になることを主張している．　◇

証明　(i) $0 \leqq t \leqq 1$ および $s, r \in (0,\infty)$ とする．(A.12) から $x \in (0,\infty)$ に対して

$$\begin{aligned} &tg(s) + (1-t)g(r) \\ &\qquad \leqq txs - tf(x) + (1-t)xr - (1-t)f(x) = x(ts + (1-t)r) - f(x), \end{aligned}$$

だから，x について下限をとると

$$tg(s) + (1-t)g(r) \leqq g(ts + (1-t)r)$$

を得る．

(ii) まず $g(s) > -\infty$ の場合を証明する．(A.12) から

$$g(r) \leqq rx - f(x), \quad x, r \in (0,\infty),$$

が成り立ち，また，

$$g(s) \geqq sx_m - f(x_m) - \frac{1}{m}, \quad m = 1,2,3,\ldots,$$

を満たす数列 x_m, $m = 1,2,3,\ldots$, が存在する．

$$\begin{aligned} g(s) - g(r) &\geqq sx_m - f(x_m) - \frac{1}{m} - (rx_m - f(x_m)) \\ &\geqq (s-r)x_m - \frac{1}{m}, \quad m = 1,2,3,\ldots, \quad r \in (0,\infty), \end{aligned}$$

となるから

$$g(s) - \overline{\lim_{r\to s}}\, g(r) \geqq -\frac{1}{m}, \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

左辺は m によらないから $\overline{\lim_{r\to s}}\, g(r) \leqq g(s)$.

次に $g(s) = -\infty$ の場合を証明する．

$$sx_m - f(x_m) \leqq -m, \quad m = 1,2,3,\ldots,$$

を満たす数列 x_m, $m = 1,2,3,\ldots$, が存在する．上と同様に

$$g(r) \leqq rx_m - f(x_m) \leqq -m + (r-s)x_m$$

を得るので

$$\overline{\lim_{r\to s}}\, g(r) \leqq -m, \quad m = 1,2,3,\ldots.$$

左辺は m によらないから $\lim_{r\to s} g(r) = -\infty$.

(iii) (A.12) から $g(s) \leqq xs - f(x)$, $x, s \in (0,\infty)$, なので，$f(x) \leqq \inf_{s\in(0,\infty)} (xs - g(s)) = g^*(x)$.

(iv) $x \in J^o$ とする．命題 A.1(v) からある a が存在して，$s \in (0,\infty)$ に対して

$$g^*(x) \leqq sx - g(s) = \sup_{y\in(0,\infty)} (sx - sy + f(y))$$
$$\leqq \sup_{y\in(0,\infty)} (sx - sy + f(x) + a(y-x))$$

（f が上に凸という仮定は命題 A.1 を用いるときに必要）．$s=a$ と選ぶと

$$g^*(x) \leqq f(x),\ x \in J_f^o.$$

(iii) と合わせると J_f^o 上で $g^* = f$ を得る．

次に $x \notin \overline{J}_f$，したがって $f(x) = -\infty$，とする．命題 A.1(vi) から任意の実数 b に対して実数 a が存在して

$$f(y) \leqq b + a(y-x),\quad y \in (0,\infty)\,.$$

よって

$$g^*(x) \leqq sx - g(s) = \sup_{y\in(0,\infty)} (sx - sy + f(y))$$
$$\leqq \sup_{y\in(0,\infty)} (sx - sy + b + a(y-x)),\quad s \in (0,\infty)\,.$$

$s=a$ と選ぶと $g^*(x) \leqq b$．b は任意だったから $g^*(x) = -\infty$ となってこの場合も $g^* = f$ を得る．

(v) $\tilde{f}$ が上に凸で $f(x) \leqq \tilde{f}(x)$, $x \in (0,\infty)$, とする．

$$\tilde{g}(s) = \inf_{x\in(0,\infty)} (sx - \tilde{f}(x)),\ s \in (0,\infty),\ \text{および}$$
$$\tilde{g}^*(x) = \inf_{s\in(0,\infty)} (sx - \tilde{g}(s)),\ x \in (0,\infty),$$

とおく．$f \leqq \tilde{f}$ だから $g(s) \geqq \tilde{g}(s)$, $s \in (0,\infty)$, となるので $g^*(x) \leqq \tilde{g}^*(x)$, $x \in (0,\infty)$．他方 $\tilde{f}$ が凸なので (iv) から $\partial\tilde{J}$ を除いて $\tilde{g}^* = \tilde{f}$ となるので，主張を得る．

(vi) (A.7) から

$$f(y) \leqq f(x) + a(y-x),\quad y \in (0,\infty).$$

移項して y について下限をとると

$$ax - f(x) \leqq g(a).$$

（このことから $g(a) > -\infty$，すなわち，$a \in J_g$ が分かると同時に）$g(a)$ の定義 (A.12) と合わせて (A.15) を得る．

(iii) と (A.13) から $f(x) \leqq g^*(x) \leqq xs - g(s)$, $s \in (0,\infty)$, だから，(A.15) と合わせると

$$ax - g(a) \leqq xs - g(s),\ s \in (0,\infty). \tag{A.16}$$

$s_1, s_2 \in J_g^o$ が $s_1 < s_2 < a$ を満たすとする．(A.7) において f, x, y をそれぞれ g, s_2, s とすることによって，

$$g(s_2) \geqq g(s) + p(s_2 - s), \quad s \in (0, \infty),$$

を満たす実数 p が存在することが分かる．これから，

$$(s_1 x - g(s_1)) - (s_2 x - g(s_2)) \geqq (p - x)(s_2 - s_1),$$

および，(A.16) も用いることで

$$p(a - s_2) \geqq g(a) - g(s_2) \geqq (a - s_2)x$$

を得る．$a > s_2$ だから後の式から $p \geqq x$ を得て，前の式から $s_1 x - g(s_1) \geqq s_2 x - g(s_2)$ を得る．すなわち $s < a$ で $sx - g(s)$ は非増加である．$s > a$ についても (A.16) 以下の議論を繰り返すことで非減少であることが証明できる．□

ここまで関数の微分可能性は仮定しなかった．次の結果は，関数が凸で C^1 級（各点で微分可能で導関数が連続）であることとそのルジャンドル変換が狭義凸であることが対応することを示す．記号の簡単のため，f もそのルジャンドル変換 g も $(0, \infty)$ 上で実数値（有限値）をとる場合について述べる．

命題 A.4　実数値関数 $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が上に凸な C^1 級関数とし，(A.12) で定義される f のルジャンドル変換 g が $(0, \infty)$ 上で実数値（有限値）をとるとする．このとき以下が成り立つ．

(i) f の導関数 f' は非増加．

(ii) 各 $s > 0$ に対して $f'(x_0(s)) = s$ を満たす狭義減少関数 $x_0\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ が存在する（関数 x_0 が狭義減少とは $s < r$ ならば $x_0(s) > x_0(r)$ を満たすことをいう）．またこのとき，

$$g(s) = s x_0(s) - f(x_0(s)), \ s > 0, \tag{A.17}$$

が成り立つ．

(iii) g は狭義上に凸である．
ここで関数 g が狭義上に凸とは (A.5) で不等号のみが成り立つ場合，すなわち，

$$g(tx + (1-t)y) > tg(x) + (1-t)g(y), \ 0 < t < 1, \quad y > x > 0,$$

を満たすことをいう．◇

注 A.5

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty, \ \text{および} \ \lim_{x \to \infty} f'(x) = 0,$$

ならば g が $(0, \infty)$ で実数値をとることも以下の証明で分かる．◇

証明　(i) 命題 A.1(i) から，$z > x > y > 0$ ならば

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqq \lim_{y'\uparrow x} \frac{f(y')-f(x)}{y'-x} = f'(x) = \lim_{z'\downarrow x} \frac{f(z')-f(x)}{z'-x} \geqq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

となるが，さらにこのことから f' が非増加と分かる．

(ii) f' が連続で非増加なので，各 $s > 0$ に対して $f'(x) = s$ を満たす $x > 0$ が存在する．f' が非増加なので $x \geqq y > 0$ ならば $f'(y) \geqq s$, $y \geqq x > 0$ ならば $f'(y) \leqq s$ となるから，$ys - f(y)$ は $y = x$ で最小値をとるよってルジャンドル変換の定義から

$$g(s) = \inf_{y\in(0,\infty)} (ys - f(y)) = xs - f(x).$$

したがって特に $g(s)$ は全ての $s > 0$ で実数値をとる．

$f'(x) = s$ を満たす x は一つとは限らないが，

$$x_0(s) = \inf\{x > 0 \mid f'(x) = s\}$$

とおけば，上に示したように各 $s > 0$ に対して右辺の中の条件を満たす $x > 0$ は存在するので $x_0(s) \geqq 0$ は確定し，f' が非増加なので $x_0(s) > 0$, かつ，$f'(x_0(s)) = s$ となる．よって特に (A.17) が成り立つ．f' が非増加なのでその逆関数 x_0 も非増加だが，異なる $f'(x)$ の値を与える x の値は異なるので x_0 は狭義減少である．

(iii) $s_3 > s_2 > s_1 > 0$ に対して $x_1 = x_0(s_1)$, $x_3 = x_0(s_3)$ とおく．x_0 の定義から $f'(x_i) = s_i$, $i = 1,3$, であり，すでに示した狭義単調性から $x_1 > x_3$ である．(A.17) から，

$$g(s_i) = s_i x_i - f(x_i),\ i = 1,3.$$

$i = 1,3$ に対して，$(x_i, f(x_i))$ を通り，傾き s_i の直線を ℓ_i とおくと，$s_i = f'(x_i)$ だから ℓ_i は曲線 $y = f(x)$ の $x = x_i$ における接線である（図 A.3）．f が上に凸だから ℓ_i は $y = f(x)$ の上側にある．

ℓ_1 と ℓ_3 の交点 $(\overline{x}, \overline{y})$ は

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{g(s_3)-g(s_1)}{s_3-s_1},\ \frac{s_1 g(s_3) - s_3 g(s_1)}{s_3-s_1}\right)$$

で与えられる．$(\overline{x}, \overline{y})$ を $y = f(x)$ が通るとすると，$i = 1,3$ どちらについても ℓ_i は $(\overline{x}, \overline{y})$ を通るので，ℓ_i が $y = f(x)$ の上側にあるためには，$\overline{x}$ で $y = f(x)$ に接する必要があるが，傾きが異なる $(s_1 < s_3)$ 二つの直線 ℓ_1, ℓ_3 が同じ点 $\overline{x}$ で C^1 級関数 $y = f(x)$ の接線になることはできない．よって曲線 $y = f(x)$ は $(\overline{x}, \overline{y})$ を通らない．すなわち，$\overline{y} > f(\overline{x})$.

次に，$(\overline{x}, \overline{y})$ を通る傾き s_2 の直線を $\overline{\ell}_2$ とおくと，$s_1 < s_2 < s_3$ だから，$x < \overline{x}$ では ℓ_3 より真に上にあり，$x > \overline{x}$ では ℓ_1 より真に上にある．したがって，$\overline{\ell}_2$ は $y = f(x)$ の真に上にあり，交点を持たない．すなわち

$$f(x) < s_2(x - \overline{x}) + \overline{y} = s_2 x + \frac{(s_1-s_2)g(s_3) + (s_2-s_3)g(s_1)}{s_3-s_1},\ x \in (0,\infty).$$

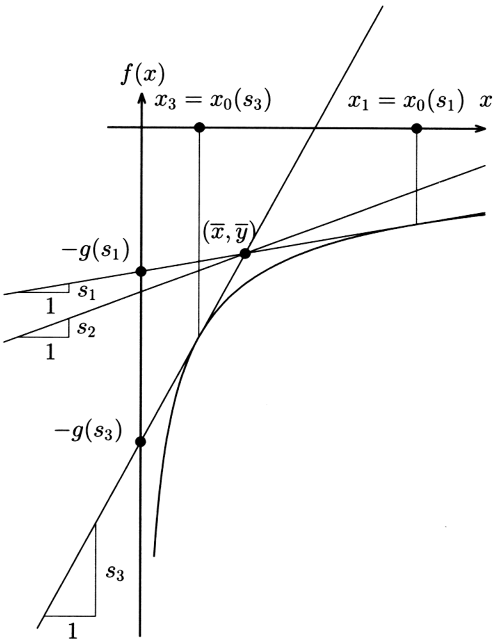


図 A.3

$x = x_2$ とおくと，(A.17) と合わせて，

$$g(s_2) = s_2 x_2 - f(x_2) > \frac{(s_2 - s_1)g(s_3) + (s_3 - s_2)g(s_1)}{s_3 - s_1}.$$

これが任意の $s_3 > s_2 > s_1 > 0$ に対して成り立つから（$t = \dfrac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} \in (0,1)$ とおいてみれば分かるように），g は狭義上に凸である．　□

定理 A.2(iv) でルジャンドル変換 g から元の関数 f が（∂J_f の点を除いて）再現できるためには元の関数 f が凸であれば十分であることをみた．一方，§A.2 で紹介するタウバー型定理のためには，ルジャンドル変換 g に対する条件だけで f を再現する必要が生じる．次の定理は g が C^1 級であることが十分条件になることを示している．これがタウバー型定理（定理 A.8）の仮定に反映する．簡単のために次の定理でも f, g, g^* が全て $(0,\infty)$ 上で実数値をとる（$-\infty$ をとらない）ことを仮定する（条件 (A.18) は g^* が実数値になるための条件である）．

定理 A.6　右連続な関数 $f:\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ のルジャンドル変換 $g:\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ が C^1 級関数で，

$$\lim_{s\to 0} g'(s) = \infty, \text{および} \lim_{s\to\infty} g'(s) = 0, \tag{A.18}$$

を満たすならば g のルジャンドル変換 g^* に対して $f(x) = g^*(x)$, $x \in (0,\infty)$．すなわち，ルジャンドル変換を 2 回行うと f に戻る．　◇

注 A.7　f は右連続でなくても，たとえば，各点ごとに右連続または左連続であれば十分である．ただし，g は f の concave hull だけで決まる（定理 A.2）ことから，実数の稠密な部分集合だけで決まってしまうので，f に関して無条件とすることはできない．　◇

証明　命題 A.4 の f にここでの g を代入すると，命題 A.4 の仮定は全て満たされるので，命題 A.4 と (A.18) から g のルジャンドル変換 g^* は $(0,\infty)$ 上の実数値関数であって狭義上に凸.

定理 A.2(iii) から $f(x) \leqq g^*(x)$, $x \in (0,\infty)$, だからある $x_0 \in (0,\infty)$ に対して $f(x_0) < g^*(x_0)$ を仮定して矛盾が生じることを示せばよい．定理の仮定から f は右連続だから，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$x_0 \leqq x < x_0+\delta$ で $f(x) < f(x_0)+\epsilon$ となるようにできる．他方，g^* は g のルジャンドル変換なので定理 A.2(i) から連続だから，同じ ϵ に対して必要なら δ を小さく（しかし正に）とって $x_0 \leqq x < x_0 + \delta$ で $g^*(x) > g^*(x_0) - \epsilon$ とできる．そこで $\epsilon = \dfrac{1}{2}(g^*(x_0) - f(x_0))$ (> 0) とおいて，$\tilde{f}:\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を次のように定める：

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} g^*(x), & x \leqq x_0 \text{ または } x \geqq x_0 + \delta, \\ (x_0, g^*(x_0)) \text{ と } (x_0+\delta, g^*(x_0+\delta)) \text{ を} & \\ \text{結ぶ線分の } x \text{ における } y \text{ の値}, & x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ が上に凸であることは定義に戻って直接確かめることができる．$f(x) \leqq \tilde{f}(x)$, $x \in (0,\infty)$, であることは，$x \leqq x_0$ または $x \geqq x_0 + \delta$ では $f(x) \leqq g^*(x) = \tilde{f}(x)$ から，$x_0 < x < x_0 + \delta$ では

$$\tilde{f}(x) \geqq \inf_{x_0<x<x_0+\delta} g^*(x) \geqq g^*(x_0) - \epsilon = f(x_0) + \epsilon > f(x)$$

から，それぞれ分かる．他方，最初に注意したように g^* は狭義上に凸なので，$x_0 < x < x_0 + \delta$ で $g^*(x) > \tilde{f}(x)$．これは命題 A.1(v) に矛盾する．　□

A.2　指数型のタウバー型定理

指数型タウバー型定理 [33] を [32, 35, 36] に沿って紹介する（原著とは定理の仮定や結論を少し変更してあるところがある）．

定理 A.8 ([33, Theorem 2.3])　非負実数 $[0,\infty)$ 上の確率測度の族 P_u, $u>0$, に対して，極限

$$f(s) = -\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,],\quad s>0, \tag{A.19}$$

が存在（実数値）することを仮定し，f のルジャンドル変換 (A.13) を f^* とおく：

$$f^*(\xi) = \inf_{s\in(0,\infty)}(s\xi - f(s)),\quad \xi>0\,. \tag{A.20}$$

f が $(0,\infty)$ 上の C^1 級関数（各点で微分可能で，導関数 f' が連続）で，

$$\lim_{s\to 0} f'(s) = \infty,\quad \text{および}\quad \lim_{s\to\infty} f'(s) = 0, \tag{A.21}$$

を満たすならば，

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] = f^*(\xi),\quad \xi>0\,. \tag{A.22}$$

◇

注 A.9　(i) この定理も以下の定理も，$F_u(\xi)=\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,]$ が $\xi\geqq 0$ で定義された非減少右連続関数で $F_u(0)=0$ を満たすならば成り立つ．つまり，確率測度の条件のうち $\mathrm{P}_u[\,[0,\infty)\,]=1$ は落としてもかまわない．

(ii) パラメータ u は，実数値（連続パラメータ）でなくても，自然数値や a_n, $n=1,2,3,\ldots$, のように離散パラメータでも（$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ ならば）かまわない．もちろん，$u\to\infty$ をとるので，大きい u で P_u が定義されていれば十分である．

(iii) (A.19) から f は $(0,\infty)$ で実数値をとる凸な関数なので，定理 A.2(iv) によって f^* のルジャンドル変換は f に戻る．

(iv) 注 A.9 に注意したように (A.21) の仮定は f^* が実数値をとる区間，すなわち，命題 A.1 の記号で $J=J_{f^*}$ が $J^o=(0,\infty)$ となるための十分条件，というだけの意味である．定理 A.8 における本質的な仮定は f が C^1 級であるという点である（定理 A.19 参照）．

(v) 確率測度が u 以外のパラメータを持っている場合に，以下の定理 A.10 の証明は，$\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]$ などを $\displaystyle\sup_{v\geqq 0}\int_\alpha^\beta e^{-us\xi}\mathrm{P}_{u,v}[\,d\xi\,]$ などに置き換えれば全てそのまま成り立つので，パラメータに関する一様な評価にも適用可能である（定理 5.9(ii) 参照）．　◇

極限 (A.19) が存在しない場合でも母関数の漸近形から確率測度の漸近形の情報を得ることができる場合がある．

定理 A.10　$(0,\infty)$ 上の実数値関数 f_1 と f_2 が上に凸であって，そのルジャンドル変換をそれぞれ

$$f_i^*(\xi) = \inf_{s>0}(s\xi - f_i(s)),\quad \xi>0,\quad i=1,2,$$

とするとき f_i^* が単調増加で命題 A.1(i) の記号で $J^o_{f_i^*} = (0,\infty)$ が成り立っているとする．

このとき，$[0,\infty)$ 上のボレル確率測度の族 P_u, $u>0$, に対して

$$\begin{aligned} f_1(s) &\leqq \varliminf_{u\to\infty} -\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \\ &\leqq \varlimsup_{u\to\infty} -\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \leqq f_2(s), \quad s>0, \end{aligned} \tag{A.23}$$

ならば

$$f_1^*(\xi_*(s^*(\xi))) \leqq \varliminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq \varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq f_1^*(\xi), \quad \xi>0\,.$$

ここで

$$s^*(\xi) = \sup\{s>0 \mid s\xi - f_2(s) \leqq f_1^*(\xi)\}, \quad \xi>0, \tag{A.24}$$

および，

$$\xi_*(s) = \inf\{\xi>0 \mid s\xi - f_1^*(\xi) \leqq f_2(s)\}, \quad s>0\,, \tag{A.25}$$

とおいた（図 A.4，図 A.5）．　◇

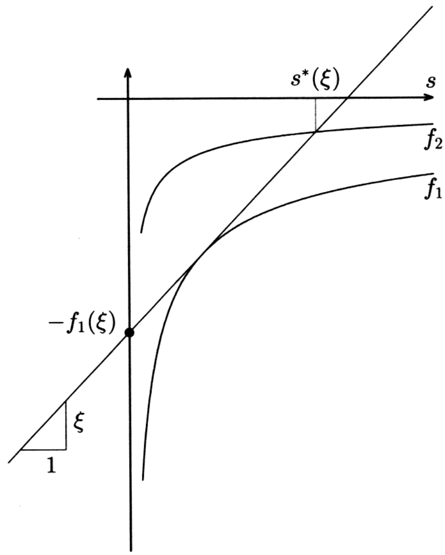


図 A.4

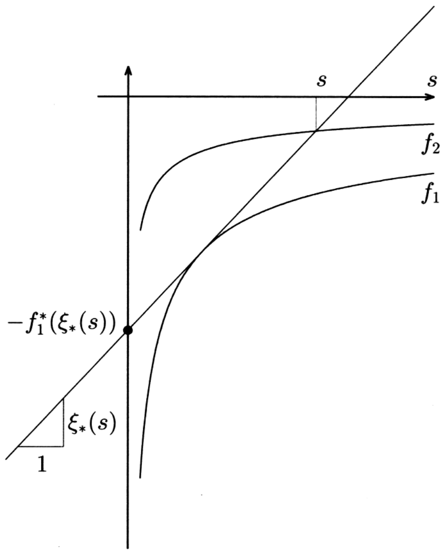


図 A.5

注 A.11　(i) ルジャンドル変換 f_i^* が $(0,\infty)$ で実数値をとる（$-\infty$ にならない）十分条件としてはたとえば定理 A.8 の (A.21) の仮定がある（注 A.9(iv) 参照）．なお，上に凸な f について $J_{f^*}^o \subset (0,\infty)$ ならば f は単調増加になる．そうでないとすると，連続関数 f の平均変化率 a が負になる区間がある．最大値の原理からその a を命題 A.1(v) の a に持つ点があるので，f^* の定義域が 0 を越えて負の側に延びていなければならなくなるから．定理の仮定 (A.23) の不等号の中の二つの式は s について単調増加なので，以上の事実は定理の適用範囲に関する本質的な制限にはならない．

(ii) 上からの評価は f_1 による下からの評価の仮定だけで十分であり，f_1 が凸である必要もない（命題 A.12）．f_1 が凸であることは下からの評価で鍵となる命題 A.13 の証明に定理 A.2(vi) を適用するところで用いる．　◇

定理 A.8 は定理 A.10 から直ちに得られる．

定理 A.10 を認めたときの定理 A.8 の証明　定理 A.10 で $f_1 = f_2 = f$ とおく．$x > 0$ に対して $\xi_*(s^*(x)) = x$ が言えれば定理 A.10 から定理 A.8 を得るが，(A.24) において f_1^* の定義から $s^*(x)$ は $sx - f(s)$ の極小値でなければならないから，$x = f'(s^*(x))$ となり，同様の注意を (A.25) で $s = s^*(x)$ を代入して考えると，$s = s^*(x)$ は $s\xi_*(s^*(x)) - f(s)$ の極小値を与えるので $\xi_*(s^*(x)) = f'(s^*(x))$ も成り立つから，

$\xi_*(s^*(x)) = x$ が言える． □

この節の残りで定理 A.10 の証明を行う．定理 A.10 の上からの評価はチェビシェフの不等式に他ならない．

命題 A.12 (定理 A.10 の上からの評価)　非負実数 $[0,\infty)$ 上の確率測度の族 P_u, $u>0$, に対して，$(0,\infty)$ 上の実数値関数 f_1 が

$$f_1(s) \leqq \varliminf_{u\to\infty} -\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,],\quad s>0,$$

を満たすならば，f_1 のルジャンドル変換 (A.13) を f_1^* とおくとき，

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq f_1^*(\xi),\quad \xi>0\,.$$

◇

証明　$\xi>0$ を任意にとる．チェビシェフの不等式

$$\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq e^{us\xi}\int_0^\infty e^{-us\eta}\mathrm{P}_u[\,d\eta\,],\quad s>0,$$

から

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq s\xi - \varliminf_{u\to\infty} -\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\eta}\mathrm{P}_u[\,d\eta\,] \leqq s\xi - f_1(s)$$

が，任意の $s>0$ に対して成り立つので，$s>0$ で inf をとると主張を得る． □

定理 A.10 の下からの評価の鍵になるのは次である．

命題 A.13　非負実数 $[0,\infty)$ 上の確率測度の族 P_u, $u>0$, に対して，

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_0^\infty e^{-us\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] < \infty,\quad s>0, \tag{A.26}$$

とし，さらに $(0,\infty)$ 上で定義された上に凸な実数値関数 f_1 が存在してそのルジャンドル変換 (A.13) を f_1^* とおくとき，f_1^* が $(0,\infty)$ 上で実数値をとり，かつ，

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq f_1^*(\xi),\quad \xi>0\,,$$

となることを仮定する．このとき，$s>0$ に対して，(A.7)（で f を f_1，J を $(0,\infty)$，x を s として適用したもの）の $a=a(s)$ をとれば，以下が成り立つ．

(i) $\xi>a$ ならば

$$\varliminf_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\log\int_\xi^\infty e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right) \geqq s\xi - f_1^*(\xi).$$

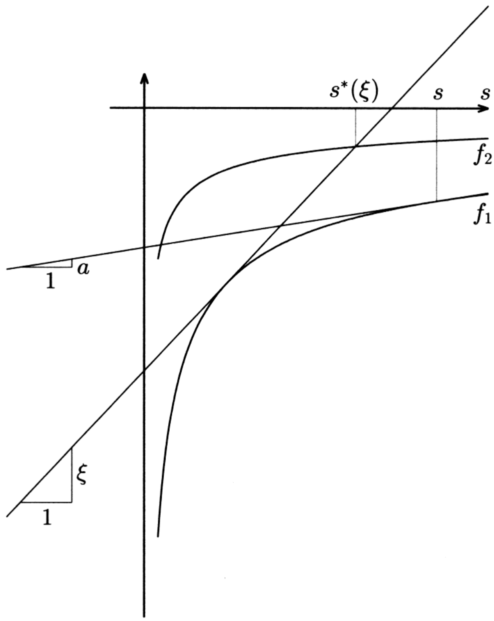


図 A.6

(ii) $0 < \xi < a$ ならば

$$\varliminf_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\log\int_0^{\xi} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right) \geqq s\xi - f_1^*(\xi).$$

◇

注 A.14 主張の $a = a(s)$ は，f_1 が凸なので (A.15) から $as - f_1^*(a) = f_1(s)$ を満たす．このことから，この命題を定理 A.10 の仮定の下で用いると，(A.23) から得られる $f_1 \leqq f_2$ と ξ_* の定義 (A.25) から $\xi_*(s) \leqq a$ を得る．さらに (A.24) の s^* に対して $s > s^*(\xi)$ ならば $\xi > 0$ と命題 A.1(v) の単調性と f_1 の凸性と $f_1 \leqq f_2$ から $\xi > a$ を得る（図 A.6）． ◇

命題 A.13 の証明で次の初等的な事実を使う．

命題 A.15 実数上の非負実数値関数 f, g に対して以下が成り立つ．

(i) 定数 c_1, c_2 に対して

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log f(u) \leqq c_1 \text{ および } \varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log g(u) \leqq c_2,$$

が成り立つならば

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log(f(u)+g(u)) \leqq \max\{c_1, c_2\}.$$

(ii) 定数 c に対して

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log f(u) \leqq c, \text{ および } \varliminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log g(u) \leqq c,$$

が成り立つならば

$$\varliminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log(f(u)+g(u)) \leqq c.$$

◇

注 A.16　連続パラメータ u のかわりにたとえば自然数をとるパラメータ n でも同様の結果が成り立つ． ◇

証明　(i) $c_1 \leqq c_2$，すなわち，$\max\{c_1, c_2\} = c_2$ が成り立つ場合について証明すれば十分である．仮定から任意の $\epsilon > 0$ に対して u_0 が存在して $f(u) \leqq e^{(c_1+\epsilon)u}$，$g(u) \leqq e^{(c_2+\epsilon)u}$，$u \geqq u_0$．よって

$$\begin{aligned}\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log(f(u)+g(u)) &\leqq \varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log(1+e^{-(c_2-c_1)u})+c_2+\epsilon\\ &\leqq \varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log 2+c_2+\epsilon = c_2+\epsilon.\end{aligned}$$

ϵ は任意の正数だから主張を得る．

(ii) 仮定から，任意の $\epsilon > 0$ と任意の u_1 に対して $u \geqq u_1$ が存在して $g(u) \leqq e^{(c+\epsilon)u}$．$u_1$ が十分大きくとってあれば $f(u) \leqq e^{(c+\epsilon)u}$ も成り立つので $\dfrac{1}{u}\log(f(u)+g(u)) \leqq c+\epsilon+\dfrac{1}{u}\log 2$．$\epsilon$ は任意の正数だから主張を得る． □

命題 A.13 の証明　定理 A.2(vi)（で f, g, s, x, a をそれぞれ命題 A.13 の主張の記号で f_1, f_1^*, ξ, s, a としたもの）から，$\xi s - f_1^*(\xi)$ は $\xi > 0$ の関数として $\xi < a$ で非増加，$\xi > a$ で非減少である．このことに注意すれば (ii) も全く同様に証明できるので，(i) のみを証明することにして以下 $\xi > a$ とする．

$\delta > 0$ を任意にとり，$\xi_k = \xi + \delta k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, とおく．各 k に対して

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq e^{-us\xi_k}\mathrm{P}_u[\,[0, \xi_{k+1}]\,]$$

だから，仮定から

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq -s\xi_k + f_1^*(\xi_{k+1}).$$

よって命題 A.15 から $N>\xi$ ならば

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{\xi}^{N} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]$$
$$\leqq \max_{k\in\mathbb{Z}_+}(-s\xi_k + f_1^*(\xi_{k+1})) = s\delta - \min_{k\in\mathbb{Z}_+}(s\xi_{k+1} - f_1^*(\xi_{k+1})).$$

$\xi s - f_1^*(\xi)$ は $\xi>0$ の関数として $\xi>a$ で非減少だから，

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{\xi}^{N} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq s\delta - s\xi + f_1^*(\xi).$$

δ は任意の正数だから

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{\xi}^{N} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq -s\xi + f_1^*(\xi). \tag{A.27}$$

同じ N に対して，

$$\int_N^\infty e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq e^{-usN/2}\int_0^\infty e^{-us\zeta/2}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]$$

と (A.26) から，N によらない定数 C_s が存在して

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{N}^{\infty} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq -\frac{s}{2}N + C_s\,. \tag{A.28}$$

N は $N>\xi$ を満たす任意の正数だから十分大きくとれば右辺はいくらでも小さくなる．

(A.27), (A.28) と命題 A.15 から，十分大きな N を用いて，

$$\varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_{\xi}^{\infty} e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq -s\xi + f_1^*(\xi).$$

よって主張を得る．□

定理 A.10 の下からの評価の証明　定理の主張の仮定の下で次の二つを証明すればよい．

(i) 各 $\xi>0$ に対して

$$\varliminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \geqq f_1^*(\xi_*(s)),\quad s>s^*(\xi). \tag{A.29}$$

(ii) 各 $s>0$ に対して $s_n,\ n=1,2,3,\ldots,$ を $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ なる数列とするとき，

$$f_1^*(\xi_*(s)) \leqq f_1^*(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_*(s_n)).$$

実際，この二つが証明されれば，$\lim_{n\to\infty} s_n = s^*(\xi),\ s_n > s^*(\xi),\ n=1,2,3,\ldots,$ なる数列 $s_n,\ n=1,2,3,\ldots,$ をとることで，(i) において $s=s_n$ として $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_*(s^*(\xi))$ に収束する部分列で $n\to\infty$ をとって，(ii) を用いれば定理 A.10 の下からの評価を得る．

(ii) の証明は，ξ_* の定義 (A.25) と凸関数 f_1^*, f_2 の連続性（命題 A.1(iii)）から

$$s_n\,\xi_*(s_n) - f_1^*(\xi_*(s_n)) \leqq f_2(s_n)$$

なので，$\eta = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_*(s_n)$ とおくと，η に収束する s_n の部分列で $n\to\infty$ をとることで

$$s\eta - f_1^*(\eta) \leqq f_2(s)$$

となる．これを ξ_* の定義と比べると $\xi_*(s)\leqq\eta$ を得るので，定理 A.10 の仮定の f_1^* の単調性を用いればよい．

以下 (i) を証明する．

$\xi>0$ と $s>s^*(\xi)$ を固定し，対応する命題 A.13 の $a=a(s)$ をとると，$\xi_*(s)\leqq a<\xi$ である（注 A.14 参照）．よって $0<\eta<\xi_*(s)$ を任意にとると $\eta<a$ となるので命題 A.13 と ξ_* の定義を順に使うと

$$-\overline{\lim_{u\to\infty}}\left(\frac{1}{u}\log\int_0^\eta e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right) = \underline{\lim}_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\log\int_0^\eta e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right)$$
$$\geqq s\eta - f_1^*(\eta) > f_2(s). \qquad \text{(A.30)}$$

一方，$\xi>a$ となるので命題 A.13 と $s>s^*(\xi)$ と s^* の定義 (A.24) を順に使うと

$$-\overline{\lim_{u\to\infty}}\left(\frac{1}{u}\log\int_\xi^\infty e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right) = \underline{\lim}_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\log\int_\xi^\infty e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,]\right)$$
$$\geqq s\xi - f_1^*(\xi) > f_2(s).$$

以上と定理の仮定 (A.23) の右辺から，命題 A.15 によって，

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} -\frac{1}{u}\log\int_\eta^\xi e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] = -\underline{\lim}_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\int_\eta^\xi e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \leqq f_2(s).$$

他方，容易に分かる通り

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} -\frac{1}{u}\log\int_\eta^\xi e^{-us\zeta}\mathrm{P}_u[\,d\zeta\,] \geqq s\eta - \underline{\lim}_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,]$$

なので，

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \geqq s\eta - f_2(s).$$

(A.30) の右側の不等式をもう 1 回使うと,

$$\varliminf_{u\to\infty} \frac{1}{u} \log \mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] > f_1^*(\eta).$$

$\eta < \xi_*(s)$ は任意だったから $\eta \uparrow \xi_*(s)$ として，凸関数の連続性を使うと (A.29) を得る. □

この節を終える前に，定理 A.10 を定理 5.9(ii) の証明 (§B.3) に用いやすい形に変形する.

系 A.17　(i) P が $\mathrm{P}[\,[0,\infty)\,] = 1$ なる 1 次元ボレル確率測度, $G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}[\,d\xi\,]$, $s > 0$, をその母関数とする．$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $0 < \nu < 1$ が存在して,

$$-C_1 \leqq \varliminf_{s\to\infty} s^{-\nu} \log G(s) \leqq \varlimsup_{s\to\infty} s^{-\nu} \log G(s) \leqq -C_2\,, \quad s > 0,$$

ならば $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ が存在して

$$-C_3 \leqq \varliminf_{x\to 0} x^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}[\,[0,x]\,] \leqq \varlimsup_{x\to 0} x^{\nu/(1-\nu)} \log \mathrm{P}[\,[0,x]\,] \leqq -C_4\,, \quad x > 0\,.$$

(ii) $n = 1,2,3,\ldots$ に対して $\tilde{\mathrm{P}}_n$ を $\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\infty)\,] = 1$ なる 1 次元ボレル確率測度, $G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi}\tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,]$, $s > 0$, をその母関数とする.
$n_0 \geqq 1$, $s_0 \geqq 0$, $C_i > 0$, $i = 1,2,3,4$, と $0 < \nu < 1$ が存在して，$\lambda = 2^{1/\nu}$ とおくとき

$$C_1 \exp(-C_2 s^\nu) \leqq G_n(s) \leqq C_3 \exp(-C_4 s^\nu), \quad n \geqq n_0 + \log_\lambda s,\ s > s_0\,,$$

ならば $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} 2^{n(1-\nu)/\nu}\alpha_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ なる任意の正項数列 $\{\alpha_n\}$ に対して,

$$\begin{aligned} -C_5 &\leqq \varliminf_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} {\alpha_n}^{\nu/(1-\nu)} \log \tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\alpha_n]\,] \leqq -C_6\,. \end{aligned}$$

◇

注 A.18　(i) 最初の主張については，証明にあらわに書かれているように，C_3, C_4 は C_1, C_2, ν で決まる．2 番目の主張についても同様に, C_5, C_6 は s_0, C_i, $i = 1,2,3,4$, ν で決まる.

(ii) 二つ目の主張については，$n \geqq n_0 + \log_\lambda s$ の右辺の s 依存性は本質的．証明で $G({a_n}^{1/\nu}s)$ を調べるので，a_n の発散の度合いに関する仮定との整合性から必要な s の範囲に条件が付く. ◇

証明　(i) $\mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] = \mathrm{P}[\,[0,u^{1-(1/\nu)}\xi]\,]$，$\xi \geqq 0$, $f_2(s) = C_1 s^\nu$，$f_1(s) = C_2 s^\nu$，とおくと，定理 A.10 の仮定は全て満たされる．また，C_4, A, B, C_3 を $C_4 = (1-\nu)\nu^{\nu/(1-\nu)} C_2^{1/(1-\nu)}$，$C_1 y^\nu - y = C_4$ $(y>0)$ の大きい方の解を $y = A$, $C_4 y^{-\nu/(1-\nu)} + Ay = C_1 A^\nu$ $(y>0)$ の小さい方の解を $y = B$，$C_3 = C_4 B^{-\nu/(1-\nu)}$，とおいて定めると，仮定から $0<\nu<1, C_1 \geqq C_2 > 0$ なので，$C_3>0, C_4>0$ になって，順に，

$$f_1^*(x) = -C_4 x^{-\nu/(1-\nu)},\quad s^*(x) = Ax^{-1/(1-\nu)},\quad \xi_*(s^*(x)) = Bx,\qquad x>0,$$

を得る．よって，定理 A.10 から，

$$\begin{aligned}-C_3\xi^{-\nu/(1-\nu)} &\leqq \varliminf_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log \mathrm{P}[\,[0,u^{1-(1/\nu)}\xi]\,]\\ &\leqq \varlimsup_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log \mathrm{P}[\,[0,u^{1-(1/\nu)}\xi]\,] \leqq -C_4\xi^{-\nu/(1-\nu)},\ \xi>0.\end{aligned}$$

$x = u^{1-(1/\nu)}$ と変数変換して $\xi = 1$ とおけば主張を得る．

(ii) 仮定と母関数の s についての単調性から $0 \leqq s \leqq s_0$ で

$$\begin{aligned}C_1\exp(-C_2{s_0}^\nu)\exp(-C_2 s^\nu) \leqq C_1\exp(-C_2{s_0}^\nu) \leqq G_n(s_0)\\ \leqq G_n(s) \leqq 1 \leqq \exp(C_2{s_0}^\nu)\exp(-C_2 s^\nu)\end{aligned}$$

となるので，一般性を失うことなく最初から $s_0 = 0$ とおいてよい．$a_n = {\alpha_n}^{-\nu/(1-\nu)}$, $n \in \mathbb{N}$, とおくと，仮定からこれは発散する正項数列．さらに，$\mathrm{P}_n[\,[0,x]\,] = \tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\alpha_n x]\,]$, $x \geqq 0$, $f_2(s) = C_2 s^\nu$, $f_1(s) = C_4 s^\nu$, とすると，定理 A.10 の仮定は u を離散パラメータ a_n として全て満たされる．特に，

$$\begin{aligned}f_1^*(x) &= -(C_4(1-\nu)^{1-\nu}\nu^\nu)^{1/(1-\nu)}x^{-\nu/(1-\nu)},\ \text{および}\\ f_2^*(x) &= -(C_2(1-\nu)^{1-\nu}\nu^\nu)^{1/(1-\nu)}x^{-\nu/(1-\nu)}.\end{aligned}$$

よって，定理 A.10 から，

$$\begin{aligned}-C_5 x^{-\nu/(1-\nu)} &\leqq \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log \mathrm{P}_n[\,[0,x]\,]\\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\log \mathrm{P}_n[\,[0,x]\,] \leqq -C_6 x^{-\nu/(1-\nu)},\ \ x>0.\end{aligned}$$

$x = 1$ とおくと，主張を得る．□

A.3　統計力学との対応

平衡系統計力学と呼ばれる理論物理学の分野では，熱力学的極限をとることで熱力学と呼ばれる分野で知られているルジャンドル変換を用いた関係式が再現されることが知られている．熱力学的極限によるルジャンドル変換の導出は指数型のタウバー型定理によって証明できる．逆に，確率測度の列の極限の考察において指数型のタウ

バー型定理の状況があるとき，統計力学的な視点が問題の背後にあることも多い（本書でも確率連鎖について歩数 L の母関数を調べているが，これは以下で概説する統計力学の設定において，L をハミルトニアンとおいたものに相当する．このことは，self-avoiding path の解析は，DNA などの紐状のものが熱的擾乱の中にあるときの統計力学に関連することを意味する）．

熱力学や統計力学の詳細はしかるべき教科書（たとえば [T21, T22]）に譲って，ここでは，それらの分野を勉強する際に本書での議論との関連の最小限の手がかりだけを残しておく．

平衡系統計力学でいう正準集合 (canonical ensemble) の定式化では，自由度 N（考察の対象となる物理系の粒子数などに比例する）をパラメータとして，sample の集合 Ω_N（スピン配位などの微視的なレベルでの一つの物理状態に対応する）とその上の非負値関数 $H_N:\ \Omega_N \to \mathbb{R}_+$（ハミルトニアン），および，$\Omega_N$ 上の測度 U_N（状態数）が与えられていて，まず分配関数（ハミルトニアンの母関数）

$$Z_N(\beta)=\int_{\Omega_N} e^{-\beta H_N(\omega)}U_N(d\omega),\quad \beta \geqq 0,$$

を定義する．ここでパラメータ β は物理的には温度 T の逆数 $\beta=\dfrac{1}{T}$ を表す．熱力学との対応を議論するときは状態数のハミルトニアンによる像測度 $W_N=U_N\circ H_N^{-1}$（熱力学的重率），すなわち，エネルギーの関数としての統計的重み，を導入して，

$$Z_N(\beta)=\int_{\Omega_N} e^{-\beta E}W_N(dE) \tag{A.31}$$

と書き換えておくことも多い．統計力学では熱力学的極限（$N\to\infty$ の極限）で以上の量や関連する量（W_N のモーメントなど）がどう振る舞うかを問題にする．熱力学極限で 1 自由度あたりの自由エネルギー

$$F(\beta)=-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N\beta}\log Z_N(\beta),\quad \beta>0, \tag{A.32}$$

が存在（有限値）する系が熱力学での考察の対象である．

ところで，統計力学という分野は，日常に見える現象は熱力学，すなわち，$N\to\infty$ における諸関数の振る舞いであるのに対して，その現象を引き起こしているのは個々の微粒子の力学である，という事実を定式化しようというところから始まった．微粒子の力学現象を大きな N についてならした結果が熱力学的現象であるはずだ，という描像である．この描像において微粒子の力学を支配するのがハミルトニアン H_N であり，その力学現象をならすときの統計的重みの与えかたを指定するのが統計的重率 W_N である．力学の基本法則の一つにエネルギー保存測がある．これは運動の間 $H_N=H_N(\omega)$ の値（エネルギー）は変わらないという物理法則である．すなわち，ある（力学の初期条件から決まる）定数 E に対して $H_N(\omega)=E$ を満たす配位 ω のみが微粒子の系の時間発展の過程で実現しうる．それゆえ，微視的な力学と統計力学の関係を論じる場合には，E を独立変数として，統計的重率 $W_N([0,E])$ を定式化の出発点におくほうが

物理的にすなおな場合もありうる．熱力学的極限で存在するのは，$E=N\mathcal{E}$ とおいて，$\mathcal{E}$（1 自由度あたりのエネルギー）の関数とみたときの 1 自由度あたりのエントロピー

$$S(\mathcal{E})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}S_N(N\mathcal{E})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log W_N([0,N\mathcal{E}]),\quad \mathcal{E}\geqq 0,$$

である．このように E ないしは $\mathcal{E}$ を独立変数とする定式化を小正準集合 (micro canonical ensemble) による方法という．

さて，正準集合と小正準集合による定式化はそもそも独立変数が違うので一見ばらばらの話だが，タウバー型定理によって両者の関係を数学的につけることができる．実際，定理 A.8 において，$u=N$, $s=\beta$, $\xi=\mathcal{E}$, $\mathrm{P}_N[\,[0,\mathcal{E}]\,]=W_N([0,N\mathcal{E}])$, $\mathcal{E}\geqq 0$, $f(\beta)=\beta F(\beta)$, $\beta>0$, とおく（W_N は測度であって確率測度ではないが注 A.9 に記したように定理 A.8 以下の結果は測度であれば成り立つ）と，(A.31), (A.32) から，もし F が C^1 級ならば（$J_F^o=(0,\infty)$ となることは熱力学を適用する系では保証されている），

$$f^*(\mathcal{E})=\inf_{\beta>0}\beta(\mathcal{E}-F(\beta)),\quad \mathcal{E}>0,$$

とおくと，定理 A.8 から

$$f^*(\mathcal{E})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathrm{P}_N[\,[0,\mathcal{E}]\,]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log W_N([0,N\mathcal{E}])=S(\mathcal{E}).$$

タウバー型定理	パラメータ u	測度 P_u	ξ	f^*	母関数	s	f
熱力学	自由度 N	小正準分布	エネルギー $\mathcal{E}$	S	正準分布	逆温度 β	βF

したがって，小正準集合の定式化から熱力学的極限で自然に得られるエントロピーと，正準集合の定式化から自然に得られる自由エネルギーの間にはルジャンドル変換

$$S(\mathcal{E})=\inf_{\beta>0}\beta(\mathcal{E}-F(\beta)),\quad \mathcal{E}>0,\tag{A.33}$$

なる対応があることが得られた．さらに逆変換をとることで，

$$F(\beta)=\inf_{\mathcal{E}>0}(\mathcal{E}-\frac{1}{\beta}S(\mathcal{E})),\quad \beta>0,\tag{A.34}$$

を得る（物理では，温度 $T=\dfrac{1}{\beta}$ を用いて右辺を $\inf\limits_{E>0}(E-TS)$ と書くのが普通）．

統計力学が発見される以前から，熱力学において $F(\beta)$ や $S(\mathcal{E})$ などの物理量やその間の (A.33) や (A.34) などの関係式が物理法則として発見されていたが，このようにして，熱力学は統計力学から熱力学極限によって数学的に導出されることが分かる．すなわち，熱力学的法則 (A.33), (A.34) が統計力学の熱力学的極限（が存在すればそれ）によって得られることが数学的に保証される．その数学的内容が指数型のタウバー型定理である．

最後に f が C^1 級であるという仮定の熱力学的意味に簡単に言及しておく．

F が微分可能ならば

$$\mathcal{E}_*(\beta) = \frac{d\,(\beta F(\beta))}{d\beta}$$

とおくとき，(A.33) の右辺の極小が $\mathcal{E}_*(\beta) = \mathcal{E}$ なる β で実現する．これは，逆温度 β の正準分布において，平均的な（1 自由度あたりの）内部エネルギーが（N が極めて大きいときには）$\mathcal{E}_*(\beta)$ で与えられることを意味する．

ちなみに，温度を 1 度増加させるのに必要なエネルギーを比熱 C と呼ぶので

$$C(\beta) = \frac{d\,\mathcal{E}_*(\beta)}{d1/\beta} = -\beta^2 \frac{d\,\mathcal{E}_*(\beta)}{d\beta} = -\beta^2 \frac{d^2 \beta F(\beta)}{d\beta^2}$$

となるが，(A.33) から $\beta F(\beta)$ は S のルジャンドル変換なので上に凸な関数だから $C(\beta) \geqq 0$ を得る．これは物体の温度を上げるには熱を加えないといけないという，当たり前の（しかし熱力学が成り立つためには重要な）物理的事実に対応している．

話を戻して，定理 A.8 では母関数の指数部の漸近形 f が C^1 級（したがって命題 A.4 によってルジャンドル変換 f^* が狭義凸）の場合に，タウバー型定理から確率測度の指数部の漸近形が f^* によって精密に求まることを言っている．これに対して，f に微分不可能な点があるとき（したがって f^* に直線部分があるとき）には，事情が変わる．

定理 A.19 ([33, Theorem 2.4])　$[0, \infty)$ 上のボレル確率測度の族 P_u, $u > 0$, に対して，各 $s > 0$ で

$$f(s) = \lim_{u\to\infty} -\frac{1}{u} \log \int_0^\infty e^{-us\xi} \mathrm{P}_u[\,d\xi\,], \quad s > 0,$$

が存在（実数値）し，そのルジャンドル変換

$$f^*(\xi) = \inf_{s>0}(s\xi - f(s)), \quad \xi > 0$$

について，命題 A.1 の記号で $J^o = J^o_{f^*} = (0, \infty)$ とする．このとき，ある $\xi_0 > 0$ で f^* が上に狭義凸ならば

$$f^*(\xi_0) \leqq \varliminf_{u\to\infty} \frac{1}{u} \log \mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq \varlimsup_{u\to\infty} \frac{1}{u} \log \mathrm{P}_u[\,[0,\xi]\,] \leqq f^*(\xi), \quad \xi \geqq \xi_0\,. \qquad \text{(A.35)}$$

◇

証明　$f_1 = f_2 = f$ として定理 A.10 を適用する．このとき定理 A.10 の s^*, ξ_* は

$$\xi_*(s^*(x)) = \inf\{\xi > 0 \mid s^*(\xi) = s^*(x)\}$$

となること（図 A.7）に注意すれば主張を得る．　□

ξ が f^* の直線部分にあるときに，ξ_0 を直線部分の下端点にとらざるを得ないというのが定理 A.8 の趣旨である（図 A.8）．ξ が f^* の上に狭義凸な点のときは (A.35) で $\xi_0 = \xi$ とできるので，(A.35) は等号になる．

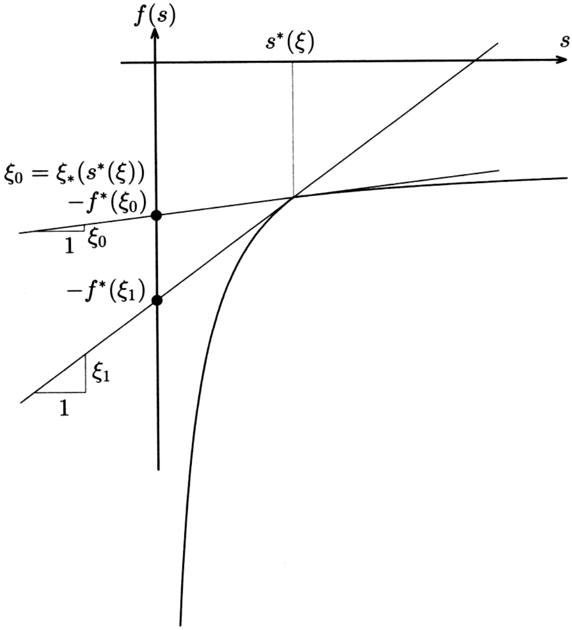


図 A.7

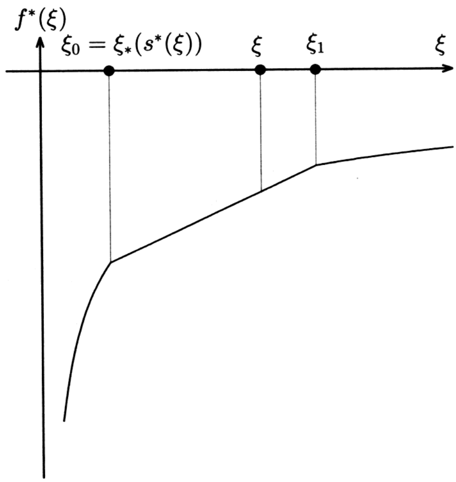


図 A.8

以上を熱力学との対応に当てはめると，f が微分不可能な点とは，F が微分不可能な点に対応する．熱力学で自由エネルギー F の 1 階微分，すなわち，内部エネルギー $\mathcal{E}_*(\beta)$ がある温度 $\beta=\beta_c$ で存在しないとき（たとえば

$$\mathcal{E}_1=\lim_{\beta\uparrow\beta_c}\mathcal{E}_*(\beta)\neq\lim_{\beta\downarrow\beta_c}\mathcal{E}_*(\beta)=\mathcal{E}_2$$

となっているとき），β_c で 1 次の相転移が起きているという．ルジャンドル変換に即して言うと，温度 β が一定のまま内部エネルギー $\mathcal{E}_*$ が $\mathcal{E}_1$ から $\mathcal{E}_2$ まで増加する．これは氷を熱すると，熱を加えているにもかかわらず（氷が全て水に変わるまでは）摂氏 0 度のままでいることに対応する．こうして，F の微分不可能な点と 1 次の相転移という物理現象が対応することも理解できる．

なお，本書で扱う path の指数などに対応するのは，内部エネルギーは存在して連続だが，比熱（F の 2 階微分）が発散する現象である．このような現象が起こる温度を 2 次の相転移点という．これは熱力学的関数の目で見たときは定理 A.19 が記述する状況よりももう一段微妙な現象である．

くりこみ群軌道が双曲型固定点（安定方向と不安定方向を持つ）の近くを通る状況 (Sierpiński gasket 上の self-avoiding path ではそのような状況を分析する）では，固定点に収束する軌道と，不安定方向にほんの少し離れた初期値から始まる軌道（これは固定点に収束しないので，いったんは固定点に近づくが途中でそれて大きく離れていく）を比べると，現実の系では local には似ているのに global には大きく違うことになる．

たとえば磁石は強く熱する（鉄が赤くなるくらい熱する）とある温度で磁石の性質を全く失ってしまう．その温度（臨界点）の付近で温度を変える (系を変える) と，micro (local) には鉄原子（の周りの電子）の相対運動が少し変わるだけだが，それが極めて多数（化学で習ったアボガドロ数 6×10^{23} が多数という単語の典型）集まった磁石として（細かいところを無視して macro (global) に）ながめると，臨界点付近で少し温度を変えるだけで磁石になったりならなかったりする．

一般に，くりこみ群の一つの軌道が自明でない（固定点直上でない）ということは，現実の系の local な現象と global な現象が大きく違うことを意味する．自由度が多数集まって新しい現象が起きることを協同現象ということがある．くりこみ群は 2 次の相転移という物理現象をこのように理解する物理理論として生まれた．

B　母関数の再帰式で定義された非負実数上の確率測度の弱収束

ここでは §5.2.2 の定理 5.9 を証明する．

§B.1 で再帰式で定義された正則関数列の収束と極限関数の性質を議論し，§B.2 で台が非負実数に含まれるボレル確率測度の列の弱収束を母関数（特性関数）の収束と関係づけ，§B.3 で両者を結びつけることで，再帰式で定義された母関数列から対応する確率測度の弱収束を得る．

B.1　再帰式で定義された正則関数列の収束

次の初等的な結果はこの節 §B の全ての結果を導くための基礎評価である．

定理 B.1　$\lambda > 1$ を定数とし，複素関数列 g_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, は以下を満たすとする：

(i) g_1 は $g_1(0) = 0$ と $g_1'(0) = 1$ を満たし，かつ，原点を含む開集合が存在してそこで正則な関数である．すなわち，正定数 C と M が存在して，$g_1(s)$ は $|s| \leqq C$ で正則であって，

$$|g_1(s) - s| \leqq M|s|^2, \quad |s| \leqq C, \tag{B.1}$$

が成り立つ．

(ii)

$$g_{n+1}(s) = g_1(\lambda g_n(s/\lambda)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{B.2}$$

が，右辺が正則な s に対して，成り立つ．

このとき正定数 C_∞ と M_∞ が存在して，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $g_n(s)$ は $|s| \leqq C_\infty$ で正則で，

$$|g_n(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty, \tag{B.3}$$

を満たす．　◇

証明　$\epsilon > 0$ を任意に固定（たとえば $\epsilon = 1$）して

$$M_\infty = \frac{M(1+\epsilon)^2}{1 - \frac{1}{\lambda}}, \quad C_\infty = \min\left\{ \frac{\epsilon\lambda}{M_\infty},\ \tilde{C} \right\}, \tag{B.4}$$

とおく．ここで $\tilde{C}$ は

$$\tilde{C}\left(1 + \frac{\tilde{C} M_\infty}{\lambda}\right) = C \tag{B.5}$$

で定義される正定数である．$C_\infty \leqq \tilde{C} < C$ に注意．

数列 M_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, を

$$M_n = M_\infty \left(1 - \frac{1}{\lambda^n}\right) - \frac{M\epsilon(2+\epsilon)}{\lambda^{n-1}}$$

で定義する．以下は容易に分かる．

$$M_n < M_\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{B.6}$$

$$M_1 = M, \tag{B.7}$$

$$M_{n+1} = M_\infty \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} M_n = M(1+\epsilon)^2 + \frac{1}{\lambda} M_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{B.8}$$

以下で n についての帰納法によって，$g_n(s)$ が $|s| \leqq C_\infty$ で正則で

$$|g_n(s) - s| \leqq M_n |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty, \tag{B.9}$$

を満たすことを証明すれば，(B.6) と (B.9) から (B.3) を得て証明が終わる．

$n=1$ の場合は $C_\infty < C$, (B.7), (B.1) から明らかである．ある自然数 k に対して $g_k(s)$ が $|s| \leqq C_\infty$ で正則で $n=k$ に対して (B.9) が成り立つとする．$\lambda > 1$ から $|s| \leqq C_\infty$ ならば $\left|\frac{s}{\lambda}\right| < C_\infty$ だから，帰納法の仮定から $g_k(s/\lambda)$ は正則で

$$\lambda|g_k(s/\lambda) - s/\lambda| \leqq \frac{M_k}{\lambda}|s|^2. \tag{B.10}$$

これと (B.6) と (B.5) から，$|s| \leqq C_\infty$ に対して

$$\lambda|g_k(s/\lambda)| \leqq |s|\left(1+\frac{M_k}{\lambda}|s|\right) \leqq C_\infty\left(1+\frac{M_k}{\lambda}C_\infty\right) \leqq C.$$

よって $g_{k+1}(s) = g_1(\lambda g_k(s/\lambda))$ は $|s| \leqq C_\infty$ で正則で，

$$\begin{aligned}|g_1(\lambda g_k(s/\lambda)) - \lambda g_k(s/\lambda)| &\leqq M|\lambda g_k(s/\lambda)|^2 \\ &\leqq M\left(|s| + \frac{M_k}{\lambda}|s|^2\right)^2 \\ &\leqq M\left(1+\frac{M_k C_\infty}{\lambda}\right)^2 |s|^2 \leqq M(1+\epsilon)^2|s|^2. \end{aligned} \tag{B.11}$$

最後の変形で (B.6) と $C_\infty \leqq \dfrac{\epsilon\lambda}{M_\infty}$ を用いた．

(B.10) と (B.11) から

$$\begin{aligned}|g_{k+1}(s) - s| &\leqq |g_1(\lambda g_k(s/\lambda)) - \lambda g_k(s/\lambda)| + \lambda|g_k(s/\lambda) - s/\lambda| \\ &\leqq \left(\frac{M_k}{\lambda} + M(1+\epsilon)^2\right)|s|^2 = M_{k+1}|s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\end{aligned}$$

となって (B.9) が $n=k+1$ に対しても成り立つ．帰納法によって (B.9) が全ての自然数 n に対して成り立つ．　□

定理 B.1 から正則関数列 g_n, $n=1,2,3,\ldots$ は $|s| < C_\infty$ で正規族をなす．これは次の周知の事実にもとづく．

定理 B.2　連結開集合上の一様有界な正則関数の集合は正規族をなす．すなわち，この関数族から選んだ任意の関数列に対して部分列と開集合上の正則関数が存在して，前者は後者に任意の有界閉部分集合上で一様に収束する．　◇

この定理の証明は複素関数論の教科書，たとえば，[T25, §XI.3, 定理 XI.3] にゆだねる．

(B.2) からさらに次を得る．

定理 B.3　(i) g_n, $n \in \mathbb{N}$, が定理 B.1 と同じ仮定を満たすとする．このとき，g_n は $n \to \infty$ で $|s| < C_\infty$ の中の任意の有界閉集合上で $|s| < C_\infty$ 上のある正則関数 g^* に一様収束する．g^* は

$$g^*(s) = g_1(\lambda g^*(s/\lambda)), \quad |s| < C_\infty\,, \tag{B.12}$$

および

$$|g^*(s) - s| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| < C_\infty\,, \tag{B.13}$$

を満たす．ここで C_∞ と M_∞ は (B.4) で定義された正定数である．
(ii) (B.12) と (B.13) は g^* を定める．すなわちこの 2 式を満たす $|s| < C_\infty$ 上の正則関数は g^* に限る．◇

証明　(i) 定理 B.1 から g_n は $|s| < C_\infty$ で正則なのでマクローリン展開を持つ：

$$g_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} s^k.$$

ここで (B.3) から $a_{n,1} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. k についての帰納法によって極限

$$\alpha_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k}\,, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, \tag{B.14}$$

が存在することを証明する．展開を (B.2) に代入して各 $k = 2, 3, 4, \ldots$ に対して s^k の係数を比べれば，

$$a_{n+1,2} = \frac{1}{\lambda} a_{n,2} + a_{1,2}, \tag{B.15}$$

および

$$a_{n+1,k} = \frac{1}{\lambda^{k-1}} a_{n,k} + \sum_{\ell=2}^{k} a_{1,\ell} \lambda^\ell \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_\ell = k} \prod_{m=1}^{\ell} a_{n,j_m} \frac{1}{\lambda^k}\,, \quad k = 3, 4, 5, \ldots. \tag{B.16}$$

よって仮定 $\lambda > 1$ と (B.15) から，まず極限

$$\alpha_2 = \lim_{n\to\infty} a_{n,2}$$

が存在することが分かる．次に，全ての $2 \leqq \ell < k$ に対して極限 α_ℓ が存在すると仮定すると，(B.16) の右辺第 2 項は $n \to \infty$ で収束するので (B.16) と $\lambda > 1$ から極限 α_k も存在する．よって，(B.14) が成り立つ．
次に定理 B.2 に戻って，g_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, の任意の部分列に対して，さらに部分列 g_{n_ℓ}, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$, をとって，$\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$ の任意の閉部分集合の上で一様に収束させることができる：

$$\exists g^*(s) = \lim_{\ell\to\infty} g_{n_\ell}(s) = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_\ell,k} s^k, \quad |s| < C_\infty\,.$$

一様収束する正則関数の級数は極限と級数和を交換できるので (B.14) から,

$$g^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^k, \quad |s| < C_\infty .$$

右辺は部分列のとり方によらないので $g^*(s)$ は部分列のとり方によらない. よって g_n は $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$ の任意の閉部分集合の上で一様に正則関数 $g^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^k$ に収束する. よって, 特に, (B.2) と (B.3) で $n \to \infty$ とすれば (B.12) と (B.13) を得る.

(ii) h が (B.12) と (B.13) を満たす正則関数として上の証明と同様にマクローリン展開してこれらの式に代入すると係数が帰納的に全て決まることが分かる. □

B.2 確率測度の弱収束

非負実数 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上の確率測度の列の弱収束について, 若干の基礎事項を復習しておく.

P を, 台が $\mathbb{R}_+$ 上に含まれる $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度とし, その母関数を

$$G(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-s\xi} \mathrm{P}[\, d\xi \,] \quad \left(= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\xi} \mathrm{P}[\, d\xi \,] \right) \tag{B.17}$$

とおく. 一般に実数上の確率測度では s が純虚数のときのみ (B.17) は常に存在して特性関数と呼ばれるが, 台が $\mathbb{R}_+$ に含まれる場合は $G(s)$ はより広く $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義される. 優収束定理（§F.3 定理 F.14）を用いれば s に関する連続性および $G(s)$ の解析性も分かる. 命題の形に要約しておく.

命題 B.4　$G(s)$ は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ なる複素数 s に対して定義され, $\mathbf{Re}(s) > 0$ で正則で $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で連続である. ◇

弱収束の定義と基礎事項を引用しておく. 証明はたとえば [T2, 五章 §4] を参照.

定理 B.5　$\mathrm{P}_n, n \in \mathbb{N}$, を実数上のボレル確率測度の列, P を実数上のボレル確率測度, とする. このとき以下は同値である.

これらのうちいずれか（したがって全て）が成り立つとき, P_n は $n \to \infty$ のとき P に弱収束するという.

(i) 実数上のあらゆる有界連続実数値関数 g に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int g \, d\mathrm{P} = \int g \, d\mathrm{P}.$$

(ii) 実数上の台が有界な連続実数値関数 f に対して必ず

$$\lim_{n\to\infty} \int f \, d\mathrm{P} = \int f \, d\mathrm{P}.$$

(iii) あらゆる開集合 $G \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[\,G\,] \geqq \mathrm{P}[\,G\,].$$

(iv) あらゆる閉集合 $F \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[\,F\,] \leqq \mathrm{P}[\,F\,].$$

(v) $\mathrm{P}[\,\partial A\,] = 0$ を満たすあらゆるボレル集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[\,A\,] = \mathrm{P}[\,A\,].$$

ここで $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ は A の境界点からなる集合. ◇

次の性質も弱収束の定義から明らかであろう.

命題 B.6　実数上のボレル確率測度の列 P_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ が, 台が非負実数 $\mathbb{R}_+$ に含まれ, かつ, P_* に弱収束するならば P_* の台も $\mathbb{R}_+$ に含まれる. ◇

ボレル確率測度 P に対してその特性関数を

$$\varphi_{\mathrm{P}}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t}\mathrm{P}[\,d\xi\,]$$

とおく. φ_{P} は実数上の複素数値関数で $|\varphi_{\mathrm{P}}(t)| \leqq 1$, $t \in \mathbb{R}$, を満たす. 特性関数と弱収束の関係に関する基礎事項をまとめておく. 証明はたとえば [T2, 五章 §4], [T3, §2.6, §2.5] を参照.

定理 B.7　(i) $a < b$ ならば

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-\sqrt{-1}bt} - e^{-\sqrt{-1}at}}{-\sqrt{-1}t} \varphi_{\mathrm{P}}(t)\,dt = \mathrm{P}[\,(a,b)\,] + \frac{1}{2}(\mathrm{P}[\,\{a\}\,] + \mathrm{P}[\,\{b\}\,])$$

(Levi の反転公式).

(ii) 特性関数は確率測度を定める. すなわち, もし二つのボレル確率測度 P と P′ に対して $\varphi_{\mathrm{P}} = \varphi'_{\mathrm{P}}$ ならば $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$.

(iii) ボレル確率測度の列 P_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ とボレル確率測度 P に対して以下が成り立つ.

(a) もし P_n が P に弱収束するならば, 実数 t の任意の有界閉集合の上で一様に

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathrm{P}_n}(t) = \varphi_{\mathrm{P}}(t).$$

(b) もし各 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathrm{P}_n}(t) = \varphi_{\mathrm{P}}(t)$$

ならば P_n は P に弱収束する.

(iv) $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度の列 P_n, $n=1,2,3,\ldots$, と実数上の関数 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して，もし，各 $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{P}_n}(t)=f(t)$$

であってかつ,

(a) $f(t)$ が $t=0$ で連続であるか，または,

(b) $t=0$ のある近傍では一様収束しているか,

ならば，P_n はあるボレル確率測度 P に弱収束し，$f=\varphi_{\mathrm{P}}$，すなわち極限測度の特性関数は f である． ◇

$\mathcal{M}$ を実数上のボレル確率測度からなるある集合とする．$\mathcal{M}$ の要素からなる任意の測度列に対してボレル確率測度 ($\mathcal{M}$ に入っていなくてもよい) に収束するような部分測度列を選ぶことができるとき，$\mathcal{M}$ は tight であるという．

定理 B.8　$\mathcal{M}=\{\mathrm{P}_u\mid u\in\mathcal{U}\}$ を実数上のボレル確率測度からなるある集合とする．

(i) $\mathcal{M}$ が tight であることと，任意の $\epsilon>0$ に対して $\mathbb{R}$ の有界閉集合 F が存在して全ての $u\in\mathcal{U}$ に対して $\mathrm{P}_u[\,F\,]>1-\epsilon$ が成り立つこと，が同値である．

(ii) $\mathrm{P}_u\in\mathcal{M}$ の台がそれぞれ $\mathbb{R}_+$ に含まれるとき，その（命題 B.4 によって $\mathbf{Re}(s)\geqq 0$ で定義されている）母関数を

$$G_u(s)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-s\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \tag{B.18}$$

とおく．もし,

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}G_u(-C)=\sup_{u\in\mathcal{U}}\int_{\mathbb{R}_+}e^{C\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]<\infty$$

を満たす $C>0$ がとれるならば，$\mathcal{M}$ は tight である．さらに，$\mathcal{M}$ の確率測度は何次のモーメントも一様有界かつ一様可積分である．すなわち，全ての $p\geqq 0$ に対して

$$\sup_{u\in\mathcal{U}}\int_{\mathbb{R}_+}\xi^p\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]<\infty,\quad \lim_{K\to\infty}\sup_{u\in\mathcal{U}}\int_K^\infty\xi^p\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]=0\,.$$

◇

証明　(i) は，たとえば [T2, 五章 §4] を参照．以下 (ii) を証明する．

$$M=\sup_{u\in\mathcal{U}}\int_{\mathbb{R}_+}e^{C\xi}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]$$

とおき，任意の $\epsilon>0$ に対して

$$K=\frac{1}{C}\log\frac{M-1+\epsilon}{\epsilon}$$

とおく．全ての $u \in \mathcal{U}$ に対して $\mathrm{P}_u[\,\{0\}\,] = 1$ ならば主張は自明だから，そうでないとすると，$M > 1$, したがって $K > 0$．P_u は台が $\mathbb{R}_+$ に含まれるから

$$M - 1 \geqq \int_K^\infty (e^{C\xi} - 1)\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] = (e^{KC} - 1)\mathrm{P}_u[\,(K,\infty)\,] = \frac{M-1}{\epsilon}\mathrm{P}_u[\,(K,\infty)\,],$$

すなわち，

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \mathrm{P}_u[\,(K,\infty)\,] \leqq \epsilon$$

を得るので $\mathcal{M}$ は tight である．

次に各 $p \geqq 0$ に対して $\xi \geqq \xi_p$ ならば $e^{C\xi} \geqq \xi^p$ となるような $\xi_p > 0$ がとれることに注意．これから

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \leqq \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{C\xi}\ \mathrm{P}_u[\,d\xi\,] + \xi_p^p < \infty.$$

最後に，

$$M' = \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_0^\infty \xi^{p+1}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,]$$

とおく．$K > 0$ ならば

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p \mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \leqq \frac{1}{K} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^{p+1}\mathrm{P}_u[\,d\xi\,] \leqq \frac{M'}{K}$$

となるので

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{u\in\mathcal{U}} \int_K^\infty \xi^p \mathrm{P}_u[\,d\xi\,] = 0.$$

□

§B.1 の結果を確率測度の弱収束に結びつけるために以下を用意しておく．

定理 B.9　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，P_n を台が非負実数 $\mathbb{R}_+$ に含まれるボレル確率測度，

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi}\mathrm{P}_n[\,d\xi\,],$$

を（命題 B.4 から $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義されることが分かっている）母関数とする．ある $C > 0$ があって G_n, $n \in \mathbb{N}$, は $|s| < C$ で正則とし，さらに，そこで正則な関数 G^* が存在して s の各点で $G_n(s)$ は G^* に収束するとする：

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s), \quad |s| < C. \tag{B.19}$$

このとき P_n は $n \to \infty$ で台が $\mathbb{R}_+$ に含まれるボレル確率測度に弱収束し，極限測度の母関数は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ と $|s| < C$ の両方で存在して連続かつ内部で正則であり，特に $|s| < C$ では G^* に等しい．さらに，G^* を $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ に解析接続した関数も G^* と書くと，$G_n(s)$ は $n \to \infty$ で $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re}(s) \geqq 0\}$ の中の任意の有界閉集合で一様に $G^*(s)$ に収束する．　◇

証明　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して G_n の正則性の仮定から $G_n(-C/2) = \int_0^\infty e^{C\xi/2} \mathrm{P}_n[\, d\xi \,]$ が有界となるので，定理 B.8(ii) から $\{\mathrm{P}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は tight である．よって測度列 P_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ の任意の部分列に対して弱収束する部分部分列が存在する（命題 B.6 からそのときの極限測度の台は $\mathbb{R}_+$ に含まれる）．部分部分列 P_{n_k} が $k \to \infty$ で P_* に弱収束したとする．P_* が部分列のとり方によらないことを言えば P_n が $n \to \infty$ で収束することが言えたことになる．

$$\tilde{G}^*(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\xi} \mathrm{P}_*[\, d\xi \,]$$

とおく．命題 B.4 から $\tilde{G}^*(s)$ は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義されて連続で，$\mathbf{Re}(s) > 0$ で正則である．

$\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ ならば $e^{-s\xi}$ は $\xi \in \mathbb{R}_+$ 上で有界連続関数となる．測度たちの台が $\mathbb{R}_+$ に含まれることに注意すれば P_{n_k} が P_* に弱収束することと合わせると，

$$\lim_{k \to \infty} G_{n_k}(s) = \tilde{G}^*(s), \quad \mathbf{Re}(s) \geqq 0, \tag{B.20}$$

となる．(B.19) と (B.20) を比べると，正則関数 G^* と $\tilde{G}^*$ は $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Re}(s) > 0,\ |s| < C\}$ で一致する．よって解析接続の一意性から $\tilde{G}^*$ は部分列 $\{n_k\}$ によらないことが分かり，G^* は $\mathbf{Re}(s) > 0$ に解析接続され，連続関数として一意的に $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ まで拡張されてそこで (B.19) を満たす．特性関数は確率測度を定めるから，P_* も部分列 $\{n_k\}$ のとりかたによらない．よって P_n は $n \to \infty$ で P_* に弱収束する．

次に (B.19) が一様に成り立つことを，特性関数の一様収束の証明（たとえば [T2, 五章，定理 3]）のまねをして証明する．$K, K' > 0$ として (B.19) を $J = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqq \mathbf{Re}(s) \leqq K',\ |\mathbf{Im}(s)| \leqq K\}$ で考える．$\epsilon > 0$ を任意に選ぶ．$\{\mathrm{P}_n\}$ が tight なので，$\mathrm{P}_n[\, (L, \infty) \,] < \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $\mathrm{P}_*[\, (L, \infty) \,] < \epsilon$ となる $L > 0$ が存在する．$e^{-s'\xi}$ は $(s', \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ の関数として $\{s' \in \mathbb{C} \mid |s'| \leqq 1\} \times [0, L]$ の上で一様連続なので，$\sup_{0 \leqq \xi \leqq L} |e^{-s'\xi} - 1|$ は $|s'| \leqq 1$ で連続である．よって $\delta > 0$ が存在して

$$\sup_{0 \leqq \xi \leqq L} |e^{-s'\xi} - 1| < \epsilon, \quad |s'| < \delta,$$

とできるから，$|s'| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|G_n(s + s') - G_n(s)| &\leqq \int_0^\infty e^{-\mathbf{Re}(s)\xi} |e^{-s'\xi} - 1| \mathrm{P}_n[\, d\xi \,] \\
&\leqq \int_0^\infty |e^{-s'\xi} - 1| \mathrm{P}_n[\, d\xi \,] \\
&\leqq \epsilon + 2\mathrm{P}_n[\, (L, \infty) \,] \leqq 3\epsilon, \quad \mathbf{Re}(s) \geqq 0,\ |s'| < \delta,\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

G^* も同様の評価が成り立つ．

J は有界閉集合なので，J の中に有限個（ℓ 個と書こう）の点 $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$ がとれて，$s \in J$ ならば $|s - s_j| < \delta$ となる $1 \leqq j \leqq \ell$ が存在するようにできる．すると

$$|G_n(s_j) - G^*(s_j)| < \epsilon, \quad n \geqq n_2,\ j = 1, 2, \ldots, \ell,$$

を満たす n_2 を選ぶことができるので，任意の $s \in J$ に対して $1 \leqq j \leqq \ell$ なる j が存在して

$$|G_n(s) - G^*(s)| \leqq |G_n(s) - G_n(s_j)| + |G_n(s_j) - G^*(s_j)| + |G^*(s_j) - G^*(s)| < 7\epsilon,$$
$$n \geqq n_2,\ 0 \leqq \mathbf{Re}(s) \leqq K',\ |\mathbf{Im}(s)| \leqq K. \quad \text{(B.21)}$$

よって J 上で $G_n(s)$ は $G^*(s)$ に一様収束する． □

大ざっぱに言うと，特性関数の遠方での性質は確率測度の近距離の性質（細かい構造）に対応する．特に特性関数が遠方で十分早く減衰すれば確率測度はルベーグ測度に関して滑らかな密度関数を持つ．その一つの具体的な結果（定理 B.11）を用意しておく．その準備として，分散が正ならば特性関数の原点付近の絶対値は 1 より小さいことに注意しておく．

命題 B.10　$\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 P が期待値 $m = \int \xi \mathrm{P}[\,d\xi\,]$ と正の分散 $v = \int (\xi - m)^2 \mathrm{P}[\,d\xi\,]$ を持てば（有限ならば），特性関数 φ_{P} が

$$|\varphi_{\mathrm{P}}(t)| < 1,\ \ 0 < |t| \leqq a,$$

を満たす正数 a が存在する．a としてたとえば，$a = \min\left\{\sqrt{\dfrac{2}{v}},\ \dfrac{\epsilon}{K+m}\right\}$ ととることができる．ここで $\epsilon = \min\left\{2,\ \dfrac{v}{2(1+\sqrt{2}v)}\right\}$ であり，K は

$$\int_{|\xi| \geqq K} (\xi - m)^2 \mathrm{P}[\,d\xi\,] \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{(B.22)}$$

を満たす正数である． ◇

証明　特性関数の定義とテーラーの定理から，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $(0,1)$ に値をとる関数たち $\theta_{1,t} :\ \mathbb{R} \to (0,1)$ と $\theta_{2,t} :\ \mathbb{R} \to (0,1)$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&e^{-\sqrt{-1}mt}\varphi(t) - 1 + \frac{1}{2}vt^2 \\
&= \int ([\cos((\xi - m)t) - 1 + \frac{1}{2}t^2(\xi - m)^2 + \sqrt{-1}(\sin((\xi - m)t) - t(\xi - m)))\mathrm{P}[\,d\xi\,] \\
&= \frac{t^2}{2}\int ([(\xi - m)^2(1 - \cos(\theta_{1,t}(\xi)\,(\xi - m)t) - \sqrt{-1}\sin(\theta_{2,t}(\xi)\,(\xi - m)t)))\mathrm{P}[\,d\xi\,]
\end{aligned}$$

とできるので，任意の $K > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t)| - |1 - \frac{1}{2}vt^2| \\
&\leqq |e^{-\sqrt{-1}mt}\varphi(t) - 1 + \frac{1}{2}vt^2| \\
&\leqq \frac{1}{2}t^2 \int (\xi - m)^2 \sqrt{(1 - \cos(\theta_{1,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2 + (\sin(\theta_{2,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2}\,\mathrm{P}[\,d\xi\,] \\
&\leqq \frac{1}{2}t^2 \left(\sqrt{2} \int_{|\xi| \geqq K} (\xi - m)^2 \mathrm{P}[\,d\xi\,] \right. \\
&\qquad + \int_{|\xi| < K} (\xi - m)^2 \sqrt{(1 - \cos(\theta_{1,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2 + (\sin(\theta_{2,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2} \\
&\qquad\qquad \left. \times \mathrm{P}[\,d\xi\,] \right),
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ を任意にとる．分散が有限なので (B.22) を満たす $K > 0$ が存在する．

$$
|\theta_{j,t}(\xi)\,(\xi - m)t| \leqq \epsilon, \quad |\xi| \leqq K, \ |t| \leqq \frac{\epsilon}{K + m}, \ j = 1, 2,
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi| < K} (\xi - m)^2 \sqrt{(1 - \cos(\theta_{1,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2 + (\sin(\theta_{2,t}(\xi)\,(\xi - m)t))^2}\,\mathrm{P}[\,d\xi\,] \\
&\qquad \leqq \epsilon \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2} \int_{|\xi| < K} (\xi - m)^2 \mathrm{P}[\,d\xi\,] \leqq \epsilon \sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2}\, v.
\end{aligned}
$$

以上の評価を合わせると，

$$
|\varphi(t)| - |1 - \frac{1}{2}vt^2| \leqq \frac{1}{2}\epsilon t^2 \left(1 + v\sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2} \right), \ |t| \leqq \frac{\epsilon}{K + m}.
$$

$\epsilon > 0$ を十分小さくとれば

$$
\epsilon \left(1 + v\sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2} \right) < v \tag{B.23}
$$

が成り立つようにできるから，

$$
|\varphi(t)| < 1, \quad 0 < |t| \leqq \min\left\{ \frac{\epsilon}{K + m}, \ \sqrt{\frac{2}{v}} \right\}
$$

となって主張が成り立つ．

具体的な値としては，たとえば $\epsilon = \min\left\{ 2, \ \dfrac{v}{2(1 + \sqrt{2}v)} \right\}$ ととれば，

$$
\epsilon \left(1 + v\sqrt{1 + \frac{1}{4}\epsilon^2} \right) \leqq \epsilon \left(1 + \sqrt{2}v \right) \leqq \frac{v}{2} < v,
$$

なので (B.23) が成り立つから，ϵ としてこの値をとれる．　□

定理 B.11　P の平均 m と分散 v が正であるような実数上のボレル確率測度 P の特性関数

$$\varphi(t) = \int e^{\sqrt{-1}\xi t} \mathrm{P}[\, d\xi \,], \quad t \in \mathbb{R},$$

に対して，定数 $\lambda > 1$ と $b > 1$ が存在して $|\varphi(\lambda t)| \leqq |\varphi(t)|^b$, $t \in \mathbb{R}$, が成り立つとする．このとき以下が成り立つ．

(i) $\nu = \dfrac{\log b}{\log \lambda}$ (> 0) とおくとき，定数 $C_1 > 0$ と $C_2 > 0$ が存在して

$$|\varphi(t)| \leqq C_2 e^{-C_1 |t|^{\nu}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{B.24}$$

(ii) P はルベーグ測度に対して C^∞ 密度関数を持つ．すなわち，$\mathbb{R}$ 上の非負値 C^∞ 関数 ρ が存在して $\mathrm{P}[\, d\xi \,] = \rho(\xi) d\xi$．さらに，$\rho$ の台は $[0, \infty)$ に含まれ，遠方で減衰する：$\displaystyle\lim_{|\xi| \to \infty} \rho(\xi) = 0$．　◇

証明　(i) 優収束定理から特性関数 $\varphi(t)$ は連続関数なので，命題 B.10 から

$$\sup_{a/\lambda \leqq |t| \leqq a} |\varphi(t)| = |\varphi(t_1)| < 1 .$$

を満たす $a > 0$ と $a/\lambda \leqq |t_1| \leqq a$ なる t_1 が存在する．$\nu = \dfrac{\log b}{\log \lambda}$ とおいて $h(t) = -|t|^{-\nu} \log |\varphi(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, で h を定義すると，仮定から

$$h(\lambda t) \geqq h(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

$|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda}$ において主張の評価を得れば（$|t| \leqq \dfrac{a}{\lambda}$ に対しては自明の評価 $|\varphi(t)| \leqq 1$ があるので）十分である．このとき $\dfrac{a}{\lambda} \leqq |t| \lambda^{-n} < a$ を満たす非負整数 n を選ぶと，

$$\begin{aligned} h(t) \geqq h(\lambda^{-n} t) = -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi(\lambda^{-n} t)| &\geqq -b^n |t|^{-\nu} \log |\varphi(t_1)| \\ &\geqq -\left(\frac{t}{a}\right)^{\nu} |t|^{-\nu} \log |\varphi(t_1)| \end{aligned}$$

となるので，$C_1 = \dfrac{1}{a^\nu} \log \dfrac{1}{|\varphi(t_1)|}$ (> 0) とおけば，$|\varphi(t)| \leqq e^{-C_1 |t|^{\nu}}$, $|t| \geqq \dfrac{a}{\lambda}$ となって主張を得る．

以上の証明から主張の定数たちは，命題 B.10 に従って

$$\begin{aligned} \epsilon &= \min\left\{2, \ \frac{v}{2(1+\sqrt{2}v)}\right\}, \\ K &= \inf\left\{ L > 0 \ \middle| \ \int_{|\xi| \geqq L} (\xi - m)^2 \mathrm{P}[\, d\xi \,] \leqq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \right\}, \\ a &= \min\left\{ \sqrt{\frac{2}{v}}, \ \frac{\epsilon}{K+m} \right\}, \end{aligned}$$

と選ぶとき，

$$C_1 = \frac{\lambda}{a^\nu} \min_{a/\lambda \leqq t \leqq a} \log \frac{1}{|\varphi(t)|},$$
$$C_2 = e^{C_1 (a/\lambda)^\nu} = \max_{a/\lambda \leqq t \leqq a} \frac{1}{|\varphi(t_1)|^{1/b}},$$

と選ぶことができることも分かる．

(ii) (B.24) から φ は可積分なので，

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{-1}t\xi} \varphi(t)\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

が存在して，有界かつ連続なことが分かる．さらに Riemann–Lebesgue の定理（たとえば [T6, 定理 29.2]）から $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$ も分かる．Fubini の定理（[T6, 定理 15.2]）と優収束定理（§F.3 定理 F.14）と Levi の反転公式（§B.2 定理 B.7）から，$a < b$ のとき

$$\int_a^b \rho(\xi)\, d\xi = \mathrm{P}[\ (a,b)\ ] + \frac{1}{2}(\mathrm{P}[\ \{a\}\ ] + \mathrm{P}[\ \{b\}\ ]).$$

左辺は a と b について連続なので，特に，$\mathrm{P}[\ \{a\}\ ] = 0$, $a \in \mathbb{R}$, および $\rho(\xi)d\xi = \mathrm{P}[\ d\xi\ ]$ を得る．P の台が $[0,\infty)$ に含まれるので ρ も同様である．

さらに，(B.24) から，k についての帰納法と優収束定理によって，全ての自然数 k に対して

$$\frac{d^k\rho}{d\xi^k}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-\sqrt{-1}t)^k e^{-\sqrt{-1}t\xi} \varphi(t)\, dt$$

が（有限に）存在することも分かる．□

B.3　再帰式から弱収束へ

定理 B.12　$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して P_n を非負実数 $[0,\infty)$ 上に台を持つボレル確率測度とし，G_n をその母関数

$$G_n(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \mathrm{P}_n[\ d\xi\ ] \tag{B.25}$$

とする．以下を仮定する．

(i)

$$\lambda > 1. \tag{B.26}$$

(ii) $G_1(s)$ は原点のある近傍で正則で $G_1'(0) = -1$ を満たす．

(iii) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$G_{n+1}(s) = G_1(-\lambda \log G_n(s/\lambda)), \tag{B.27}$$

が，右辺が存在して正則な s に対して，成り立つ．

このとき，P_n は $n \to \infty$ で，台が非負実数に含まれるボレル確率測度 P_* に収束する．その母関数 $G^*(s)$ はある $C_\infty > 0$ に対して，$|s| < C_\infty$ および $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義されて正則であり，§5.2 の (5.39)

$$G^{*\prime}(0) = -1, \quad G^*(s) = G_1(-\lambda \log G^*(s/\lambda)),$$

を満たす．逆にこれらの式は母関数 G^* を一意的に定める．さらに $K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty$ または $\mathbf{Re}(s) \geqq 0\}$ を満たす任意の有界閉集合 K の上で $G_n(s)$ は $n \to \infty$ で $G^*(s)$ に一様収束する．特に，正定数 C_∞ と M_∞ が存在して，

$$\begin{aligned} &|s + \log G_n(s)| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \\ &|s + \log G^*(s)| \leqq M_\infty |s|^2, \quad |s| \leqq C_\infty\,, \end{aligned} \tag{B.28}$$

が成り立つ．◇

注 B.13　$G_n'(0) = -\displaystyle\int_{[0,\infty)} \xi \mathrm{P}_n[\,d\xi\,]$ なので，平均 m が存在するボレル確率測度については，変数 ξ を定数倍することで $G_n'(0) = -1$ とできる．よって仮定のうち $G_1'(0) = -1$ は本質的な制限ではない．◇

証明　$G_1(s)$ は母関数なので $G_1(0) = 1$ であり，$G_1(s)$ が原点の近傍で正則なので，

$$\sup_{|s| \leqq C_0} |G_1(s) - 1| < 1\,. \tag{B.29}$$

であって $G_1(s)$ が $|s| < C_0$ で正則となるような $C_0 > 0$ が存在する．

各 n と s に対して $g_n(s) = -\log G_n(s)$ とおくと，(B.27) から (B.2) を得る．定義と仮定 $G_1(0) = 1$ と $G_1'(0) = -1$ から $g_1(0) = 0$ と $g_1'(0) = 1$ を得る．仮定から $G_1(s)$ は $|s| \leqq C_0$ で正則で 0 でないから，$g_1(s) = -\log G_1(s)$ は $|s| \leqq C_0$ で正則である．よって $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{g_1(s)}{s} - 1\right)$ は $|s| \leqq C_0$ で正則である．

$$M_1 = \sup_{|s| = C_0} |G_1(s) - 1|$$

とおくと，(B.29) から $M_1 < 1$．$|z| < 1$ では

$$|\log(1 + z)| \leqq \int_0^1 \left|\frac{z}{1 + tz}\right| dt \leqq \frac{|z|}{1 - |z|}\,,$$

となることに注意すると

$$|g_1(s)| = |\log(1 + (G_1(s) - 1))| \leqq \frac{M_1}{1 - M_1}, \quad |s| = C_0,$$

となるから，

$$M_0 = \sup_{|s|=C_0} |g_1(s)| \tag{B.30}$$

とおくとこれは実数（有限）である．

Cauchy の積分公式から，$|s| \leqq C_0/2$ で

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s}\left(\frac{g_1(s)}{s} - 1\right)\right| &= \left|\oint_{|\sigma|=C_0} \frac{1}{\sigma}\left(\frac{g_1(\sigma)}{\sigma} - 1\right) \frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}(\sigma - s)}\right| \\ &\leqq \sup_{|s|=C_0} \left|\frac{1}{s}\left(\frac{g_1(s)}{s} - 1\right)\right| \frac{2\pi C_0}{2\pi(C_0 - C_0/2)} \leqq \frac{2}{C_0^2}(M_0 + C_0),\end{aligned}$$

となる．最後の変形で (B.30) を用いた．$C = C_0/2$ および $M = \dfrac{2}{C_0^2}(M_0 + C_0)$ とおけばこれは (B.1) を意味する．定理 B.1 と定理 B.3 から，正定数 C_∞ と M_∞ が存在して，全ての自然数 n に対して $G_n(s) = e^{-g_n(s)}$ は $|s| \leqq C_\infty$ 上で正則で n に関して一様に有界であり，さらに，$|s| < C_\infty$ で正則な関数 G^* が存在して，$K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty\}$ を満たす任意の有界閉集合 K の上で一様に

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s)$$

となる．また，定理 B.1 と定理 B.3 から (B.3) と (B.13) によって，(B.28) が成り立つ．

G_n が収束することと定理 B.9 から P_n は $n \to \infty$ で，台が非負実数に含まれるあるボレル確率測度 P_* に弱収束することが分かる．その母関数 $G^*(s)$ は，定理 B.3 と定理 B.9 から，$\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ および 0 の近傍で定義されて，${G^*}'(0) = -1$ および (5.39) を 0 の近傍で満たす．逆にこれらは G^* を一意に定める．

$\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ ならば $|G^*(s)| \leqq 1$ となるので，

$$\mathbf{Re}(-\lambda \log G^*(s/\lambda)) = -\lambda \log |G^*(s/\lambda)| \geqq 0.$$

他方，命題 B.4 から $G_1(s)$ は $\mathbf{Re}(s) > 0$ で正則で $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で連続だから，解析接続の一意性から (5.39) は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ でも成り立つ．同様に (B.27) は $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ でも成り立つ．定理 B.9 からさらに，$K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty$ または $\mathbf{Re}(s) \geqq 0\}$ が有界閉集合ならば

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G^*(s),$$

が $s \in K$ について一様収束であることも分かる．　□

§5.2.2 の定理 5.9 の証明　(i) $\Phi_n(x_c) = x_c$ と Φ_1 の展開係数が非負であることから，n についての帰納法で，Φ_n の展開係数も非負で，かつ，(5.32) の右辺で z を $\Phi_n(z)$ で置き換えたものは $|z| \leqq x_c$ で収束することが分かるので，$\Phi_n(z)$ のマクローリン展開の収束半径は正（x_c より大）である．そこで，

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k \tag{B.31}$$

とおくと，$c_{n,k} \geqq 0,\ n,k \in \mathbb{Z}_+$, であって，

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} x_c^{k-1} e^{-sk\lambda^{-n}}.$$

$\Phi_n(x_c) = x_c$ から $G_n(0) = 1$ が従うので，

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{k\lambda^{-n}\}\,] = c_{n,k} x_c^{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,\{-k\lambda^{-n} \mid k \in \mathbb{Z}_+\}\,] = 0,$$

によって台が $\mathbb{R}_+$ に含まれるボレル確率測度 $\tilde{\mathrm{P}}_n$ が定義できて，かつ，G_n はその母関数になっていることが分かる．命題 5.6 から $\lambda \geqq 2$ なので (B.26) が成り立つ．x_c と λ の定義と (5.38) から $G_1'(0) = -1$ も容易に分かる．$\Phi_1(z)$ を定義するべき級数の収束半径 r は $r > x_c$ を満たすので，特に $\Phi_1(z)$ は x_c の近傍で正則である．よって C_0 を十分小さくとれば $G_1(s)$ は $|s| < C_0$ で正則になる．(B.27) は (5.38) と (5.15) から成り立つ．すなわち定理 B.12 の仮定が全て成り立つ．よって定理 B.12 から以下が分かる．

$\tilde{\mathrm{P}}_n$ は $n \to \infty$ で，台が非負実数に含まれるボレル確率測度 $\tilde{\mathrm{P}}_*$ に収束する．その母関数 $G^*(s) = \displaystyle\int e^{-s\xi}\tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,]$ はある $C_\infty > 0$ に対して，$|s| < C_\infty$ および $\mathbf{Re}(s) \geqq 0$ で定義されて正則であり，(5.39) を満たす．逆に (5.39) は G^* を一意的に定める．さらに，$K \subset \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < C_\infty$ または $\mathbf{Re}(s) \geqq 0\}$ を満たす任意の有界閉集合 K の上で $G_n(s)$ は $n \to \infty$ で $G^*(s)$ に一様収束する．

特に $G^*(s)$ が $|s| < C_\infty$ で正則だから有限．したがって $0 < C < C_\infty$ ならば $s = -C$ とおくことで $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{C\xi}\tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,] < \infty$ を得る．

正則関数 $G_n(s)$ が一様収束するので，その微分も収束する．これから，$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \xi^k \tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,] = \int_{\mathbb{R}} \xi^k \tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,]$$

を得る．さらに，$\tilde{\mathrm{P}}_n$ が弱収束しているので第 I 部 §1.4 の (1.20) の証明と同様の方法で任意の正の実数 p に対しても

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,] = \int_{\mathbb{R}_+} \xi^p \tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,]$$

を得る．

(ii) タウバー型定理（§A.2 系 A.17）を用いる．
(5.15), (5.38), (5.32) とその続きの条件 2 から

$$G_{n+1}(s) = \sum_{k \geqq 2} c_k x_c^{k-1} G_n(s/\lambda)^k, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,\ s \geqq 0,$$

だが，母関数は $0 \leqq G_n(s) \leqq 1$, $s \geqq 0$, を満たすから x_c の定義と合わせると，

$$c_2 x_c G_n(s/\lambda)^2 \leqq G_{n+1}(s) \leqq G_n(s/\lambda)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,\ s \geqq 0. \tag{B.32}$$

$s_0 > 0$ を任意に固定する．$s \geqq s_0$ に対して $m = m(s) = [\log_\lambda(s/s_0)]$ $(\geqq 0)$ とおくと，$s_0 \leqq s\lambda^{-m(s)} < s_0\lambda$ となるので，母関数 $G_n(s)$ の s についての単調性から，

$$\begin{aligned}(c_2 x_c)^{-1}(c_2 x_c G_n(s_0\lambda))^{2^m} &\leqq (c_2 x_c)^{-1}(c_2 x_c G_n(s\lambda^{-m}))^{2^m} \\ &\leqq G_{n+m}(s) \leqq G_n(s\lambda^{-m})^{2^m} \\ &\leqq G_n(s_0)^{2^m}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,\ s \geqq s_0.\end{aligned}$$

(i) の証明から定理 B.12，特に (B.28) が成り立つから

$$s - M_\infty s^2 < \log \frac{1}{G_n(s)} < s + M_\infty s^2, \ \ 0 \leqq s \leqq C_\infty,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

となる正定数 M_∞, C_∞ がある．したがって $s_0 > 0$ を十分小さくとれば，$\log \dfrac{1}{c_2 x_c G_n(s_0\lambda)}$ も $\log \dfrac{1}{G_n(s_0)}$ も正になるので，(5.42) の通り $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおくと，$0 \leqq G_n(s) \leqq 1$ と $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s_0}\right)^\nu < 2^{m(s)} \leqq \left(\dfrac{s}{s_0}\right)^\nu$ から，

$$\begin{aligned}&-\log(c_2 x_c) - \left(\frac{s}{s_0}\right)^\nu \log \frac{1}{c_2 x_c G_n(s_0\lambda)} \\ &\qquad \leqq \log G_{n+m(s)}(s) \leqq -\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_0}\right)^\nu \log \frac{1}{G_n(s_0)}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots,\ s \geqq s_0.\end{aligned}$$

すなわち，正数 C_2, C_4 と実数 C_1, C_3 が存在して，

$$C_1 - C_2 s^\nu \leqq \log G_N(s) \leqq C_3 - C_4 s^\nu, \quad N \geqq \log_\lambda(s/s_0),\ s \geqq s_0. \tag{B.33}$$

よって系 A.17(ii) から (5.40) を得る．
$\tilde{\mathrm{P}}_*$ に関する主張 (5.41) も全く同様に，$\tilde{\mathrm{P}}_*$ の母関数

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,], \ \ s \geqq 0,$$

に対して (5.39) によって (B.32) と同様の性質

$$c_2 x_c G^*(s/\lambda)^2 \leqq G^*(s) \leqq G^*(s/\lambda)^2, \quad s \geqq 0,$$

が成り立ち，かつ，定理 B.12 の (B.28) が成り立つので，(B.32) 以下と同様の議論によって，正数 C_2, C_4 と実数 C_1, C_3 が存在して，

$$C_1 \exp(-C_2 s^\nu) \leqq G^*(s) \leqq C_3 \exp(-C_4 s^\nu),\ s \geqq s_0\,,$$

を得るから系 A.17(i) から (5.41) を得る．
さらに，チェビシェフの不等式から任意の $n \in \mathbb{N}$, $\xi \geqq 0$, $s \geqq 0$ に対して

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\xi]\,] \leqq e^{\xi s} \int_0^\infty e^{-s\xi} \tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,] = e^{\xi s} G_n(s)$$

となるので，(B.33) から

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\xi]\,] \leqq \exp(C_3 + \xi s - C_4 s^\nu) \tag{B.34}$$

が $s \leqq s_0 \lambda^n$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$, $\xi \geqq 0$, $s \geqq 0$ に対して成り立つ．$C_3 + \xi s - C_4 s^\nu$ の $s \geqq 0$ における最小値は $s_* = \left(\dfrac{C_4 \nu}{\xi}\right)^{1/(1-\nu)}$ のときにとるが，$\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \xi \geqq \dfrac{C_4 \nu}{s_0^{1-\nu}}$ ならば $s_* \leqq s_0 \lambda^n$ を満たすので (B.34) に代入することができて，

$$\tilde{\mathrm{P}}_n[\,[0,\xi]\,] \leqq \exp(C_3 - \xi^{-\nu/(1-\nu)} (C_4 (1-\nu)^{1-\nu} \nu^\nu)^{1/(1-\nu)})$$

を得るので，(5.43) も成り立つ．
(iii) $\tilde{\mathrm{P}}_*$ の特性関数

$$\varphi^*(t) = G^*(-\sqrt{-1}t) = \int e^{\sqrt{-1}\xi t} \tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,],\quad t \in \mathbb{R},$$

に (5.39) と (5.38) を用いると，

$$\varphi^*(\lambda t) = \frac{1}{x_c} \Phi_1(\varphi^*(t) x_c), \tag{B.35}$$

となるので，(5.32) と条件 2 と $|\varphi^*(t)| \leqq 1$ から

$$|\varphi^*(\lambda t)| \leqq |\varphi^*(t)|^2 \sum_{k=2}^\infty c_k |\varphi^*(t)|^{k-2} x_c^{k-1} \leqq |\varphi^*(t)|^2,\quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) の証明と同様に定理 B.12 から $G^*(s)$ は $s=0$ の近傍で正則で

$$|s + \log G^*(s)| \leqq M_\infty |s|^2,\quad |s| \leqq C_\infty\,,$$

なる正数 M_∞, C_∞ があることが言えるので，$\tilde{\mathrm{P}}_*$ の平均 m は $m=1$，分散 v は有限 ($v \leqq M_\infty$) であることが分かる．$v > 0$ を証明するために，(B.35) を 2 階微分して $t=0$ とおき，$\varphi^{*\prime}(0) = \sqrt{-1}m = \sqrt{-1}$ と $\Phi_1'(x_c) = \lambda$ を用いると，

$$v\lambda(\lambda - 1) = x_c \Phi_1''(x_c) - \lambda(\lambda - 1).$$

(5.32) と $x_c = \Phi_1(x_c) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_c^k$，および $\lambda = \Phi_1'(x_c) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x_c^{k-1}$ を右辺に代入すると

$$v\lambda(\lambda-1) = \frac{1}{2} \sum_{n,m \geqq 0} (n-m)^2 c_n c_m x_c^{n+m-2}.$$

仮定から $c_k > 0$ なる $k > 2$ があるので，

$$v \geqq \frac{(k-2)^2}{\lambda(\lambda-1)} (c_2 c_k x_c^k) > 0.$$

以上から $\tilde{\mathrm{P}}_*$ は定理 B.11 の仮定を全て $b=2$ で満たすので，定理 B.11(i) から，$\tilde{\mathrm{P}}_*$ はルベーグ測度に対して C^∞ 密度関数を持つ．すなわち，$\mathbb{R}$ 上の非負値 C^∞ 関数 ρ が存在して $\tilde{\mathrm{P}}_*[\,d\xi\,] = \rho(\xi)d\xi$．さらに，$\rho$ の台は $[0,\infty)$ に含まれ，$\lim_{|\xi|\to\infty} \rho(\xi) = 0$ が成り立つ．

次に $\rho(\xi) > 0$, $\xi > 0$, を言う．命題 5.6 と (5.32) から

$$\sum_{k>\lambda} (k-\lambda) c_k x_c^k = \sum_{k \leqq \lambda} (\lambda - k) c_k x_c^k \geqq (\lambda-2) c_2 x_c^2 > 0\,.$$

よって，$c_{k_0} > 0$ となる $k_0 > \lambda$ が存在する．関数の畳込みを $f*g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(\eta) g(\xi - \eta)\,d\eta$ と書き，k 重の畳込みを f^{*k} と書くと，(B.35) と (5.32) および密度 ρ が連続であることから，

$$\lambda^{-1}\rho(\lambda^{-1}\xi) \geqq c_2 x_c \rho * \rho(\xi) + c_{k_0} x_c^{k_0-1} \rho^{*k_0}(\xi). \tag{B.36}$$

これと ρ の非負性と連続性から，ある $\eta_i \geqq 0$, $i=1,2$, に対して $\rho(\eta_i) > 0$, $i=1,2$, ならば $\rho\left(\frac{1}{\lambda}(\eta_1+\eta_2)\right) > 0$ であり，また $\eta_i \geqq 0$, $i=1,\ldots,k_0$, に対して $\rho(\eta_i) > 0$, $i=1,\ldots,k_0$, ならば $\rho\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k_0}\eta_i\right) > 0$ である．ρ の台を $A = \overline{\{\xi \in \mathbb{R}_+ \mid \rho(\xi) > 0\}}$ とおく．平均が正 $(m=1)$ だからある $\xi_0 > 0$ が A に入る．それゆえ，今考察したことから $\frac{2}{\lambda}\xi_0 \in A$．同様に帰納的に

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \xi_0 \in A, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

台は定義によって閉集合だから $0 \in A$．よって，さらに同様の議論で

$$k\lambda^{-1}\xi_0 \in A, \quad k = 0,1,2,\ldots,k_0\,,$$

となり，帰納法で，

$$k\lambda^{-n} \in A, \quad k = 0,1,2,\ldots,k_0^n\,,\ n = 1,2,3,\ldots.$$

よって $\mathbb{R}_+$ の稠密な部分集合に対して ρ が正になる．すなわち，$A=\mathbb{R}_+$．他方，$\rho(\xi)=0$ となる $\xi>0$ があると，再び (B.36) から

$$\rho(\eta)\rho(\xi-\eta)=0,\quad 0\leqq\eta\leqq\lambda\xi,$$

となるので $A=\mathbb{R}$ に矛盾．よって $\rho(\xi)>0, \xi>0$．

(iv) (5.44) を証明するために，まず次の補題を証明する．

補題 B.14　$\tilde{\mathrm{P}}_n$ の特性関数

$$\varphi_n(t)=G_n(-\sqrt{-1}t)=\int e^{\sqrt{-1}\xi t}\tilde{\mathrm{P}}_n[\,d\xi\,],\quad t\in\mathbb{R},$$

に対して，自然数 n_0 と正数 M, C, a が存在して

$$|\varphi_n(t)|\leqq\frac{C}{x_c}e^{-M(|t|/a)^{\log 2/\log\lambda}},\quad a\lambda^{-1}\leqq|t|\leqq a\lambda^{n-n_0},\ n\geqq n_0\,. \tag{B.37}$$

◇

証明　まず (5.35) から $0\leqq x<x_c$ ならば

$$\Phi_n(x)<Ce^{-M2^n},\quad n\geqq 0\,. \tag{B.38}$$

となる正定数 C, M が存在することに注意しておく．すでにみたように $\varphi^*(t)$ は命題 B.10 の仮定を満たす連続関数だから，命題 B.10 から $a/\lambda\leqq|t_1|\leqq a$ を満たす $a>0$ と実数 t_1 があって

$$\sup_{a/\lambda\leqq|t|\leqq a}|\varphi^*(t)|=|\varphi^*(t_1)|<1\,.$$

$\varphi^*(t)=G^*(-\sqrt{-1}t)$ であることと原点の近傍で s について一様に $\lim_{n\to\infty}G_n(s)=G^*(s)$ であることに注意して (5.38) を用いると，$\epsilon>0$ と自然数 n_0 が存在して

$$|\Phi_n(x_ce^{\sqrt{-1}\lambda^{-n}t})|<x_c-\epsilon,\quad n\geqq n_0,\ \frac{a}{\lambda}\leqq|t|\leqq a\,. \tag{B.39}$$

(B.38) と (B.39) から，$m\geqq 0, N\geqq n_0, \dfrac{a}{\lambda}\leqq|t'|\leqq a$ に対して，

$$\begin{aligned}|\Phi_{N+m}(x_ce^{\sqrt{-1}\lambda^{-N}t'})|&=|\Phi_m(\Phi_N(x_ce^{\sqrt{-1}\lambda^{-N}t'}))|\\&\leqq\Phi_m(|\Phi_N(x_ce^{\sqrt{-1}\lambda^{-N}t'})|)\leqq\Phi_m(x_c-\epsilon)\leqq Ce^{-M2^m}.\end{aligned} \tag{B.40}$$

$|t|\in[a\lambda^{-1},a\lambda^{n-n_0}]$ をとる．$\dfrac{a}{\lambda}\leqq|t|\lambda^{-m}<a$ を満たすように $m\in\mathbb{Z}_+$ を選ぶと $0\leqq m\leqq n-n_0$ である．(B.40) で $N=n-m\geqq n_0$ および $t'=t\lambda^{-m}$ とおく．

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{x_c}\Phi_n(x_ce^{\sqrt{-1}\lambda^{-n}t})$$

に注意すれば (B.40) から (B.37) を得る．　□

(5.44) の証明に戻る．

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi t}(\mathrm{P}_n * g_n)(\xi)d\xi = \int e^{\sqrt{-1}\xi t} g_n(\xi-\eta)\mathrm{P}_n[\,d\eta\,]$$

とおくと Fubini の定理から，

$$\tilde{\varphi}_n(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2h_n^2}\varphi_n(t).$$

集合 $A \subset \mathbb{R}$ の指示関数を χ_A と書くと，補題 B.14 から次の n について一様な評価を得る．

$$\begin{aligned}|\chi_{[0,a\lambda^{n-n_0}]}(|t|)\tilde{\varphi}_n(t)| &\leqq |\chi_{[0,a\lambda^{n-n_0}]}(|t|)\varphi_n(t)| \\ &\leqq \min\{1,\ \frac{C}{x_c}e^{-M(|t|/a)^{\log 2/\log\lambda}}\},\quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

よって，優収束定理から

$$\lim_{n\to\infty}\int |\chi_{[0,a\lambda^{n-n_0}]}(|t|)\tilde{\varphi}_n(t) - \varphi^*(t)|dt = 0\,.$$

他方，$b > \dfrac{\sqrt{2\log\lambda}}{a}\lambda^{n_0}$ ならば，

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty}\int |\chi_{[0,a\lambda^{n-n_0}]}(|t|)\tilde{\varphi}_n(t) - \tilde{\varphi}_n(t)|dt &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} 2\int_{a\lambda^{n-n_0}}^{\infty} e^{-h_n^2t^2/2}dt \\ &\leqq \varlimsup_{n\to\infty} 2a^{-2}\lambda^{n_0-2}b^{-2}\lambda^n n^{-1}\exp(-a^2\lambda^{-2n_0}b^2n/2) = 0\end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\int |\tilde{\varphi}_n(t) - \varphi^*(t)|dt = 0,$$

すなわち，$\mathrm{P}_n * g_n(\xi)$ のフーリエ変換は $\rho(\xi)$ のフーリエ変換に L^1 収束する．フーリエ逆変換をとることで (5.44) を得る．　□

C　くりこみ群が定める確率測度の列と確率連鎖との対応（定理 5.11 の証明）

この節で定理 5.11 の証明を行う．

補題 C.1　n を自然数とし，$\tilde{\Omega}_n^p$ を $\tilde{\Omega}_n$ または $\tilde{\Omega}_n^r$ のいずれかのこととし，どちらであるかに応じてそれぞれ $\mathrm{P}_{p,n}$ を P_n または $\mathrm{P}_{r,n}$ のこととする．

$$\hat{w} = (\hat{w}(0), \hat{w}(1), \hat{w}(2), \ldots, \hat{w}(L(\hat{w}))) \in \tilde{\Omega}_n^p$$

ならば，$m > n$ なる任意の自然数 m に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_m[\ \{w \in \tilde{\Omega}_m \mid 2^m w(j) = 2^n \hat{w}(j)\ ,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\ ] \\
&\quad + \mathrm{P}_{r,m}[\ \{w \in \tilde{\Omega}^r_m \mid 2^m w(j) = 2^n \hat{w}(j)\ ,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\ ] \\
&\qquad\qquad = \mathrm{P}_{p,n}[\ \{\hat{w}\}\ ].
\end{aligned}$$

◇

証明　一般の場合は $m = n+1$ の場合から m に関する帰納法によって証明できるので，$m = n+1$ の場合を証明する．また，$\hat{w} \in \tilde{\Omega}^r_n$ の場合も全く同様なので，以下では $\hat{w} \in \tilde{\Omega}_n$ の場合のみを証明する．

$\hat{w} \in \tilde{\Omega}_n$ とし，$w \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ が

$$2^{n+1} w(j) = 2^n \hat{w}(j)\ ,\quad j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w}),$$

を満たしているとする．この仮定を §5.1.2 の (5.24) の対応 $(w', \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_{L(w')})$ と比べると，$\tilde{w}_1 = \hat{w}$ である．系 5.5 の (5.26) から $b_{n+1}(w) = b_1(w')\, b_n(\hat{w}) \prod_{j=2}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j)$．これと (5.18) と (5.25) と (5.6) を $m=1$ で用いたのち，(5.7) と (5.17) を使うと，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{n+1}[\ \{w \in \tilde{\Omega}_{n+1} \mid 2^{n+1} w(j) = 2^n \hat{w}(j)\ ,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\ ] \\
&= \sum_{\substack{w \in \tilde{\Omega}_{n+1}; \\ 2^{n+1} w(j) = 2^n \hat{w}(j)\ ,\ j=0,1,2,\ldots,L(\hat{w})}} b_1(w') x_c^{-1} \prod_{j=1}^{L(w')} b_n(\tilde{w}_j) \prod_{j=1}^{L(w')} x_c^{T_{1,j}(w) - T_{1,j-1}(w)} \\
&= b_n(\hat{w})\, x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ 2^{n+1} w'(1) = 2^n \hat{w}(L(\hat{w}))}} b_1(w') \prod_{j=2}^{L(w')} \sum_{\tilde{w}_j \in \tilde{\Omega}_n} b_n(\tilde{w}_j) x_c^{L(\tilde{w}_j)} \\
&= b_n(\hat{w}) x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ 2^{n+1} w'(1) = 2^n \hat{w}(L(\hat{w}))}} b_1(w') \Phi_n(x_c)^{L(w')-1} \\
&= b_n(\hat{w})\, x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ w'(1) = 2^{-1} \hat{w}(L(\hat{w}))}} b_1(w') x_c^{L(w')-1} \\
&= b_n(\hat{w})\, x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ w'(1) = 2^{-1}}} b_1(w') x_c^{L(w')-1}.
\end{aligned}$$

最後の変形で $\hat{w} \in \tilde{\Omega}_n$ ならば $\hat{w}(L(\hat{w})) = 1$ であることを用いた．

同様に，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{r,n+1}[\,\{w \in \tilde{\Omega}^r_{n+1} \mid 2^{n+1}w(j) = 2^n\hat{w}(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\,] \\
&\quad = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}^r_1 \\ w'(1)=2^{-1}}} b_1(w')x_c^{L(w')-1} \\
&\quad = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}^r_1 \\ w'(1)=2^{-1}}} \mathrm{P}_1[\,\{w'\}\,].
\end{aligned}
$$

ここで，和の変数 w' を原点に関して対称移動した path に変数変換して，確率の左右対称性 (5.49) を用いると，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{r,n+1}[\,\{w \in \tilde{\Omega}^r_{n+1} \mid 2^{n+1}w(j) = 2^n\hat{w}(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\,] \\
&\quad = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ w'(1)=-2^{-1}}} \mathrm{P}_1[\,\{w'\}\,].
\end{aligned}
$$

二つの式を加えると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{n+1}[\,\{w \in \tilde{\Omega}_{n+1} \mid 2^{n+1}w(j) = 2^n\hat{w}(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\,] \\
&\quad + \mathrm{P}_{r,n+1}[\,\{w \in \tilde{\Omega}^r_{n+1} \mid 2^{n+1}w(j) = 2^n\hat{w}(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}\,] \\
&\qquad\qquad = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{\substack{w' \in \tilde{\Omega}_1 \\ w'(1)\in\{\pm 2^{-1}\}}} \mathrm{P}_1[\,\{w'\}\,]
\end{aligned}
$$

となるが，path $w' \in \tilde{\Omega}_1$ の最初の 1 歩 $w'(1)$ は $\pm 2^{-1}$ のいずれかであるから，この式は

$$
b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1} \sum_{w' \in \tilde{\Omega}_1} \mathrm{P}_1[\,\{w'\}\,] = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1}\,\mathrm{P}_1[\,\tilde{\Omega}_1\,] = b_n(\hat{w})\,x_c^{L(\hat{w})-1}
$$

となるので $\mathrm{P}_{p,n}[\,\{\hat{w}\}\,]$ に等しい． □

注 C.2　証明は原点での折り返しに関する対称性を用いて，到達点についての和を最初の 1 歩の和にすり替えることで全確率が 1 という整合条件を導いた．元々，1 歩あたりの確率を左右対称にとってあったので，到達点についても対称な (5.49) が整合する． ◇

定理 5.11 の証明　式を見やすくするために，この証明の中では $\tilde{\Omega}^+_n = \tilde{\Omega}_n$, $\tilde{\Omega}^-_n = \tilde{\Omega}^r_n$, $\mathrm{P}_{+,n} = \mathrm{P}_n$, $\mathrm{P}_{-,n} = \mathrm{P}_{r,n}$, などとおき，さらに

$$
f(x) + f(-x) = \sum_{\pm} f(\pm x)
$$

というように，複号に関する和の記号を用いることにする（複号が複数含まれるときは複号同順に

$$
\sum_{\pm} g(\pm x, \pm y, \mp z) = g(x,y,-z) + g(-x,-y,z)
$$

などと定義する). たとえば主張の (5.50) は

$$\mathrm{P}[\,W_j = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,k\,]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\mathrm{P}_{\pm,n}[\,\{w' = (w'(0), w'(1), w'(2), \ldots, w'(L(w'))) \in \tilde{\Omega}_n^{\pm} \mid$$
$$2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}\,]$$

と書く.

k 歩の path $w \in \tilde{\Omega}_k$ をとり, さらに, 最初の k 歩が w に等しい無限長 path を集めた集合

$$C(w) = \{w' = (w'(0), w'(1), w'(2), \ldots) \in \tilde{\Omega} \mid w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}$$

と (5.51) を満たす $n = n(w)$ をとって

$$\mathrm{P}_k[\,C(w)\,] = \frac{1}{2}\sum_{\pm}\mathrm{P}_{\pm,n}[\,\{w' \in \tilde{\Omega}_n^{\pm} \mid 2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}\,] \qquad \text{(C.1)}$$

とおく. 右辺が n によらないこと (したがって左辺の定義になっていること) を証明する. $m > n$ とする. $w' \in \bigcup_{\pm}\tilde{\Omega}_m^{\pm}$ ならば $2^m w'$ は $\{\pm 2^n\}$ のいずれかの点を通る. w' を初めてこの点集合に達する時刻までに制限することで $\bigcup_{\pm}\tilde{\Omega}_m^{\pm}$ の path w' に対して $\bigcup_{\pm}\tilde{\Omega}_n^{\pm}$ の path $\hat{w}$ を対応させることができる. このとき $L(\hat{w})$ は $|2^n\hat{w}(j)| \geqq 2^n$ を満たす最小の j であることに注意しておく. すなわち, $2^m w'(j) = w(j)$, $j = 0,1,2,\ldots,k$, ならば (5.51) から $L(\hat{w}) \geqq k$ を得る. このことから

$$\frac{1}{2}\sum_{q\in\{\pm\}}\mathrm{P}_{q,m}[\,\{w' \in \tilde{\Omega}_m^{q} \mid 2^m w'(j) = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,k\}\,]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p\in\{\pm\}}\ \sum_{\substack{\hat{w}\in\tilde{\Omega}_m^{p};\\ 2^n\hat{w}(j)=w(j)\,,\ j=0,1,2,\ldots,k}}\ \sum_{q\in\{\pm\}}\mathrm{P}_{q,m}[\{w' \in \tilde{\Omega}_m^{q} \mid 2^m w'(j) = 2^n\hat{w}(j),$$
$$j = 0,1,2,\ldots,L(\hat{w})\}]$$

となるが, 補題 C.1 を使えばさらに

$$= \frac{1}{2}\sum_{p\in\{\pm\}}\mathrm{P}_{p,n}[\,\{\hat{w} \in \tilde{\Omega}_m^{p} \mid 2^n\hat{w}(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k\}\,]$$

と変形できる. すなわち (C.1) の右辺は n によらない. よって (C.1) の右辺の定義は確定する.

次に，集合 $C(w)$ たちに対して定義された P_k を拡張して確率測度を定義する（§F.1参照）．最初の k 歩までで決まる集合からなる（無限長 path の集合 $\tilde{\Omega}$ の）σ 加法族 $\mathcal{F}_k$ 上の確率測度を

$$\mathrm{P}_k[\,A\,] = \sum_{w\in\tilde{\Omega}_k;\ C(w)\subset A} \mathrm{P}_k[\,C(w)\,], \quad A \in \mathcal{F}_k\,, \tag{C.2}$$

で定義する．P_k が確率測度であることを確認するには $\mathrm{P}_k[\,\tilde{\Omega}\,] = 1$ を言えば十分である．なぜなら，最初の k 歩だけで決まる集合しか見ない（定義域をその範囲に限定している）ということは，k 歩の path の集合 $\tilde{\Omega}_k$ の上の集合関数と同様に議論できるということで，第 I 部 §1.2 の (1.3) 以下と同様の議論によって，加法性は明らかになるからである．そこで $\mathrm{P}_k[\,\tilde{\Omega}\,] = 1$ を言うために，n を $2^n \geqq k$ なる自然数とすると，$w' \in \bigcup_{\pm}\tilde{\Omega}_n^{\pm}$ ならば $L(w') \geqq 2^n$ なので $L(w') \geqq k$ を得るから，$2^n w'(j) = w(j)\,,\ j = 0,1,2,\ldots,k,$ なる $w \in \tilde{\Omega}_k$ はただ一つ決まる．よって，(C.1), (5.18), (5.49), (5.7), (5.17) から

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_k[\,\tilde{\Omega}\,] &= \sum_{w\in\tilde{\Omega}_k} \mathrm{P}_k[\,C(w)\,] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{w\in\tilde{\Omega}_k}\sum_{\pm} \sum_{\substack{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm};\\ 2^n w'(j)=w(j)\,,\ j=0,1,2,\ldots,k}} b_n(w')x_c^{L(w')-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm}} b_n(w')x_c^{L(w')-1} = x_c^{-1}\Phi_n(x_c) = 1\,.
\end{aligned}$$

こうして，(C.2) で定義された P_k が $\tilde{\Omega}$ 上の確率測度であることが証明された．

$\mathrm{P}_k,\ k = 0,1,2,\ldots,$ が整合条件

$$\mathrm{P}_{k+1}[\,C(w)\,] = \mathrm{P}_k[\,C(w)\,], \quad w \in \tilde{\Omega}_k\,,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{C.3}$$

満たすことを言えば，§F.1 の議論によって全ての $k \in \mathbb{Z}_+$ と $w \in \tilde{\Omega}_k$ に対して (5.50) を満たす確率連鎖 $W_0, W_1, W_2, \ldots$ が存在することが分かる．

$k \in \mathbb{Z}_+$ および $w \in \tilde{\Omega}_k$ とする．$2^n \geqq k+1$ ならば $C(w) \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ に注意して，(C.2), (C.1), (5.18) を用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{k+1}[\,C(w)\,] &= \sum_{\substack{w''\in\tilde{\Omega}_{k+1};\\ |w''(j)=w(j),\ j=0,1,2,\ldots,k}} \mathrm{P}_{k+1}[\,C(w'')\,] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{\substack{w''\in\tilde{\Omega}_{k+1};\\ w''(j)=w(j),\ j=0,1,2,\ldots,k}} \sum_{\substack{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm};\\ 2^n w'(j)=w''(j)\,,\ j=0,1,2,\ldots,k+1}} b_n(w')x_c^{L(w')-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{\substack{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm};\\ \pm 2^n w'(j)=w(j)\,,\ j=0,1,2,\ldots,k}} b_n(w')x_c^{L(w')-1} \\
&\quad \times \sharp\{w'' \in \tilde{\Omega}_{k+1} \mid w''(j) = w(j),\ j = 0,1,2,\ldots,k,\ w''(k+1) = 2^n w'(k+1)\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\pm} \sum_{\substack{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm};\\ \pm 2^n w'(j)=w(j),\ j=0,1,2,\ldots,k}} b_n(w') x_c^{L(w')-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\pm} \mathrm{P}_{\pm,n}[\,\{w'\in\tilde{\Omega}_n^{\pm} \mid 2^n w'(j)=w(j),\ j=0,1,2,\ldots,k\}\,]$$

$$= \mathrm{P}_k[\,C(w)\,].$$

途中の変形で，w'' に関する和を，条件を満たす w'' の本数になおしたあと，その条件を満たす w'' がただ一つ決まることを用いた．

よって (5.50) を満たす確率連鎖の存在が証明された．□

D　Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path のくりこみ群解析

この節では §6.3.3 の結果のうち前半 (定理 6.22, 定理 6.24, 定理 6.26) を [29, 30] に従って証明する．これらの定理は §5 の問題との対比で言うと §5.2 の解析（の一部）に相当する．より正確には §6.3.2 に設定した固定点と臨界点の存在に集約したくりこみ群に対する仮定 (FP1)–(FP4), (CS1) が，dSG 上の self-avoiding path の漸近的性質に関して §5.2 に相当する性質を導くのに十分であることを主張する．

§6.3.3 の後半の結果（定理 6.28, 定理 6.29）の証明は次節 §E で行う．

D.1　くりこみ写像の正値性と相構造

定理 6.22 と定理 6.24 は，くりこみ群の写像 $\mathbf{\Phi}$ が正係数多項式（正係数ならば §5 のように収束する級数でもかまわない）の場合はくりこみ群が力学系として不安定な方向を一つ持つことを言っている．

$\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点ならばくりこみ群 (6.27) と (FP1) から

$$\mathbf{X}_n(\mathbf{x}_c) = \mathbf{x}_c\,,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{D.1}$$

となる．$n\in\mathbb{Z}_+$ に対して $\mathbf{X}_n$ のヤコビ行列を $\mathcal{J}_n$ とおく：

$$\mathcal{J}_{n,IJ}(\mathbf{x}) = \frac{\partial X_{n,I}}{\partial x_J}(\mathbf{x}),\quad I,J\in\mathcal{I}_d\,,\ \mathbf{x}\in\mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}. \tag{D.2}$$

特に (6.32) から $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}$ である．(6.27) と合成関数の微分によって

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{X}_{n-1}(\mathbf{x}))\cdot\mathcal{J}(\mathbf{X}_{n-2}(\mathbf{x}))\cdot\cdots\cdot\mathcal{J}(\mathbf{X}_1(\mathbf{x}))\cdot\mathcal{J}(\mathbf{x}),\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{D.3}$$

となるので (D.1) から

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{x}_c) = \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)^n,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{D.4}$$

補題 D.1　$\Phi_{(1)}(\mathbf{x})$ は ${x_{(i)}}^2$, $1\leqq i\leqq d$, なる項を持つ．◇

証明　命題 6.12 において $\Phi_{(1)}(\mathbf{x})$ が ${x_{(1)}}^2$ を持つことを証明したのと同様に，具体的な path の形から得られる．□

補題 D.2　$\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点ならば

(i) $x_{c,(1)} > 0$．すなわち $(1) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$．
(ii) $\mathbf{v}_R$ を (FP2) で与えられたものとするとき $v_{R,I} > 0,\ I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$．　◇

証明　(i) (FP4) から $\mathbf{x}_c \neq \mathbf{0}$ なので，$x_{c,I} > 0$ なる $I \in \mathcal{I}_d$ がある．(FP4) と合わせるとさらに $x_{c,(i)} > 0$ となる $1 \leqq i \leqq d$ がある．よって補題 D.1 から $x_{c,(1)} = \Phi_{(1)}(\mathbf{x}_c) \geqq x_{c,(i)}^2 > 0$．
(ii) (FP3) と $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ から $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_{I,(1)} > 0$ となるので，(FP2) および (i) と合わせると

$$v_{R,I} \geqq \frac{1}{\lambda} J(\mathbf{x}_c)_{I,(1)}\, v_{R,(1)} > 0\,.$$

□

定理 6.22 の証明　(i) (6.39) の右辺を D' とおくと $D' \subset D$．逆，すなわち，$D'^c \subset D^c$（Ξ_d の中での補集合）を証明するために $\mathbf{x} \in D'^c$ $(\subset \Xi_d)$ とする．D' の定義から $X_{n,I}(\mathbf{x}) > 1$ なる $n \in \mathbb{Z}_+$ と $I \in \mathcal{I}_d$ がとれるので，Ξ_d の定義から $X_{n,(i)}(\mathbf{x}) > 1$ なる $1 \leqq i \leqq d$ が存在する．よって補題 D.1 から $X_{n+1,(1)}(\mathbf{x}) > 1$ となって，命題 6.12 から $X_{n+m,(1)}(\mathbf{x}) \geqq X_{n+1,(1)}(\mathbf{x})^{2^{m-1}}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,(1)}(\mathbf{x}) = \infty. \tag{D.5}$$

すなわち，$D'^c \subset D^c$．
(ii) $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ ならば明らか．$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \setminus \{0\}$ に対して $r = \max_{I\in\mathcal{I}_d;\, x_I \neq 0} \dfrac{x'_I}{x_I}$ とおく．$I \in \mathcal{I}_d$ に対して Φ_I は正係数多項式で各項は次数 2 以上（命題 6.12）なので，$0 \leqq r \leqq 1$ ならば

$$\max_{I\in\mathcal{I}_d} \Phi_I(\mathbf{x}') \leqq r^2 \max_{I\in\mathcal{I}_d} \Phi_I(\mathbf{x}).$$

帰納法によって，

$$\max_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}') \leqq r^{2^n} \max_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

$\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$ かつ $\mathbf{x}' \in \Xi_d$ であって，しかも，各 $I \in \mathcal{I}_d$ ごとに $x'_I < x_I$ または $x'_I = x_I = 0$ が成り立つならば，$0 \leqq r < 1$ である．$\{X_{n,I}(\mathbf{x})\}$ は有界なので $\mathbf{x}' \in \tilde{D}$ を得る．
(iii) $\epsilon > 0$ に対して

$$D_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \Xi_d \mid \sum_{I\in\mathcal{I}_d} x_I < \epsilon\}$$

とおく．命題 6.12 から Φ_I は各項の次数が 2 以上の多項式なので，

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_d} \Phi_I(\mathbf{x}) \leqq M\epsilon \sum_{I\in\mathcal{I}_d} x_I\,, \quad \mathbf{x} \in D_\epsilon,\ 0 < \epsilon < 1\,,$$

なる（ϵ によらない）定数 $M>0$ が存在する．そこで $\epsilon=\min\left\{\frac{1}{2M},\ \frac{1}{2}\right\}$ と選ぶと，

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n+1,I}(\mathbf{x})=\sum_{I\in\mathcal{I}_d}\Phi_I(\mathbf{X}_n(\mathbf{x})),$$

に注意すれば，n に関する帰納法によって，

$$\mathbf{X}_n(\mathbf{x})\in D_\epsilon,\quad n\in\mathbb{Z}_+,\ \mathbf{x}\in D_\epsilon.$$

これよりさらに，

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n+1,I}(\mathbf{x})\leqq M\epsilon\sum_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x})\leqq\frac{1}{2}\sum_{I\in\mathcal{I}_d} X_{n,I}(\mathbf{x}),\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

を得るので，$\mathbf{x}\in\tilde{D}$ が従う．よって $\epsilon=\min\left\{\frac{1}{2M},\ \frac{1}{2}\right\}$ のとき $D_\epsilon\subset\tilde{D}$．他方，$\tilde{D}$ の定義から，$\mathbf{x}\in\tilde{D}$ ならば十分大きな n に対して $\mathbf{X}_n(\mathbf{x})\in D_\epsilon$ となる．$\mathbf{X}_n$ は（多項式なので）連続関数であって D_ϵ は開集合なので，$\mathbf{x}$ のある近傍 U がとれて $\mathbf{X}_n(U)\subset D_\epsilon$ とできる．よって $U\subset\tilde{D}$．これは $\tilde{D}$ が D の（Ξ_d の中での）開部分集合であることを意味する．D^o は D の最大の開部分集合だから $\tilde{D}\subset D^o$ である．$\tilde{D}\supset D^o$ を証明するために $\mathbf{x}'\in D^o$ とする．D^o は開集合だから全ての $I\in\mathcal{I}_d$ に対して $x'_I<x_I$ となる $\mathbf{x}\in D^o$ が存在する．このとき (ii) から $\mathbf{x}'\in\tilde{D}$ となる．

(iv) (6.39), (6.40) から，D, D^o, D^c は $\mathbf{\Phi}$ の不変部分集合である．(i) から $D=\overline{D}$ だから ∂D も不変部分集合である．全ての成分が十分小さな $\mathbf{x}$ は D^o に入ることと，全ての成分が十分大きな $\mathbf{x}$ は D^c に入ることは明らかだからこれらは空集合ではない．またそれゆえ，その境界 ∂D も空集合ではない． □

定理 6.24 の証明　$\beta=\beta_c$ のときは定義 (CS1) から直接主張が成り立つ．これを (6.38) および (6.40) と合わせると，$\mathbf{x}_{can}(\beta_c)\in\partial D$ を得る．それゆえ定理 6.22(ii) から $\beta>\beta_c$ ならば $\mathbf{x}_{can}(\beta)\in\tilde{D}$ なので特に $\lim_{n\to\infty}\mathbf{Z}_n(\beta)=0$，$\beta<\beta_c$ ならば $\mathbf{x}_{can}(\beta)\in D^c$ だから特に (D.5) を得たのと同様の議論によって $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{d} Z_{n,(i)}(\beta)=\infty$ を得る． □

D.2 行列の作用素ノルム

定理 6.26 の証明の準備のために行列のノルムについて復習する．

$N\in\mathbb{N}$ とする．$N\times N$ 行列 B に対して $\|B\|$ を非負定値行列 B^*B の最大固有値の平方根で定義する．ここで B^* は B の共役行列，すなわち，$(B^*)_{IJ}=\overline{B_{JI}}$, $I,J=1,2,\ldots,N$, で定義される行列とする．複素数 z に対して $\overline{z}$ は複素共役を表す．

N 行のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $|\mathbf{x}|$ を通常の ℓ^2 ノルム，すなわち $|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$ で定義されるノルムとする．また，ベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ に対して $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を通常の内積 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=$

$\overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_N}y_N$ とする．$\|\cdot\|$ の定義と固有値の定義から $|B\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x}, B^*B\mathbf{x}) \leqq \|B\|^2 (\mathbf{x},\mathbf{x})$ となって

$$|B\mathbf{x}| \leqq \|B\|\,|\mathbf{x}| \tag{D.6}$$

が一般的に成り立つ．これから，行列 B, C に対して

$$\|BC\| \leqq \|B\|\,\|C\| \tag{D.7}$$

が成り立つことに注意する．実際 (D.6) を 2 回使えば任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$|BC\mathbf{x}| \leqq \|B\|\ |C\mathbf{x}| \leqq \|B\|\,\|C\|\ |\mathbf{x}|$$

が成り立つので $\mathbf{x}$ として $(BC)^*BC$ の最大固有値 $\|BC\|^2$ の固有ベクトルをとると

$$|BC\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x}, (BC)^*BC\mathbf{x}) = \|BC\|^2 (\mathbf{x},\mathbf{x}) = \|BC\|^2 |\mathbf{x}|^2$$

だから (D.7) を得る．

$\|\cdot\|$ は行列の集合上のノルムになる．ノルムの定義のうち直ちに明らかでないのは三角不等式だけだが，ベクトルのノルムについての三角不等式を用いれば

$$|(B+C)\mathbf{x}| = |B\mathbf{x} + C\mathbf{x}| \leqq |B\mathbf{x}| + |C\mathbf{x}|$$

を任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して得るので，$\mathbf{x}$ として $(B+C)^*(B+C)$ の最大固有値 $\|B+C\|$ の固有関数をとれば

$$\begin{aligned}\|B+C\|\,|\mathbf{x}| &= \sqrt{(\mathbf{x}, (B+C)^*(B+C)\mathbf{x})} \\ &= |(B+C)\mathbf{x}| \leqq |B\mathbf{x}| + |C\mathbf{x}| \leqq (\|B\| + \|C\|)|\mathbf{x}|\end{aligned}$$

となって三角不等式

$$\|B+C\| \leqq \|B\| + \|C\| \tag{D.8}$$

を得る．最後の変形で (D.7) を用いた．

$N \times N$ 行列の集合は $\mathbb{R}^{N^2}$ 次元線形空間なので，成分ごとの収束

$$\lim_{n\to\infty} B_{nij} = C_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N,$$

と $\|\cdot\|$ による収束 $\lim_{n\to\infty} \|B_n - C\| = 0$ は同値である．

命題 D.3 ([23, Lemma (3.1)], [24, Lemma 4.2]) $N \in \mathbb{N}$ とする．$N \times N$ 行列 A および A_n, $n \in \mathbb{N}$, に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n - A\| < \infty$ とし，さらに，A の固有値のうち絶対値が最大のもの λ は 1 より大きい実数であって λ 以外の固有値は絶対値が λ 未満とする．固有値 λ は重複を許すが，対応する Jordan 細胞は全て 1 次元とする．このとき，

$$\lim_{m\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \|\lambda^{-n} A_{n+m}A_{n+m-1}\cdots A_{m+1} - R\| = 0 \tag{D.9}$$

となる．ここで

$$R = \lim_{n\to\infty} (\lambda^{-1}A)^n$$

は，正則行列 Q によって QAQ^{-1} が Jordan 標準形ならば，QRQ^{-1} は対角行列であって，$(QAQ^{-1})_{ii} = \lambda$ なる i に対しては $(QRQ^{-1})_{ii} = 1$ であり，それ以外の i に対して $(QRQ^{-1})_{ii} = 0$ である．

さらに極限 $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} A_n A_{n-1} \cdots A_1$ が存在する．　◇

証明　R の存在とその形は Jordan 標準形 QAQ^{-1} で考えれば A に対する仮定より容易に得られる．

$M = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n - A\|$ $(< \infty)$ とおく．まず $\|A\| = \lambda$ と (D.7), (D.8) から $k, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\lambda^{-k+1} \|A_{m+k-1}A_{m+k-2}\cdots A_{m+1}\| &\leqq \prod_{\ell=1}^{k-1} (\lambda^{-1} \|A + (A_{m+\ell} - A)\|) \\ &\leqq \prod_{\ell=1}^{k-1} (1 + \lambda^{-1} \|A_{m+\ell} - A\|) \leqq \exp\left(\sum_{\ell=1}^{k-1} \lambda^{-1} \|A_{m+\ell} - A\|\right) \leqq e^M. \quad \text{(D.10)}\end{aligned}$$

これからさらに同様の計算で

$$\begin{aligned}&\lambda^{-n} \|A_{n+m}A_{n+m-1}\cdots A_{m+1} - A^n\| \\ &\leqq \lambda^{-n} \sum_{k=1}^{n} \left\| A^{n-k}(A_{m+k} - A)A_{m+k-1}A_{m+k-2}\cdots A_{m+1} \right\| \\ &\leqq e^M \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{n} \|A_{m+k} - A\|.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\lambda^{-n} A_{n+m}A_{n+m-1}\cdots A_{m+1} - R\| \\ &\leqq e^M \lambda^{-1} \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \|A_\ell - A\| + \lim_{n\to\infty} \left\|(\lambda^{-1}A)^n - R\right\| \\ &= e^M \lambda^{-1} \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \|A_\ell - A\|.\end{aligned}$$

最後に，$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|A_\ell - A\| < \infty$ なので $\lim_{m\to\infty} \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \|A_\ell - A\| = 0$ となるから (D.9) を得る．

(D.9) から任意の $\epsilon > 0$ に対して十分大きな m をとれば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\lambda^{-n} A_{n+m}A_{n+m-1}\cdots A_{m+1} - R\| < \frac{\epsilon}{4e^M}$$

となるので，$n_0 > m$ が存在して

$$\left\|\lambda^{-n} A_{n+m} A_{n+m-1} \cdots A_{m+1} \;-\; R\right\| < \frac{\epsilon}{2e^M}\,,\quad n \geqq n_0,$$

となる．(D.10) も用いることで $n, n' \geqq n_0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left\|\lambda^{-n} A_n A_{n-1} \cdots A_1 - \lambda^{-n'} A_{n'} A_{n-1} \cdots A_1\right\| \\
&\quad \leqq \left\|\lambda^{-n+m} A_n A_{n-1} \cdots A_{m+1} - R\right\| \left\|\lambda^{-m} A_m A_{m-1} \cdots A_1\right\| \\
&\qquad + \left\|\lambda^{-n'+m} A_{n'} A_{n'-1} \cdots A_{m+1} - R\right\| \left\|\lambda^{-m} A_m A_{m-1} \cdots A_1\right\| \\
&\quad < \epsilon
\end{aligned}$$

となるから $\lambda^{-n} A_n A_{n-1} \cdots A_1$ はコーシー列になるので，収束する．　□

D.3　定理 6.26 の証明

次の命題は，$\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$，すなわち，くりこみ群軌道が self-avoiding 固定点に収束すれば，指数的に（等比数列以上の速さで）収束することを言っている．この命題は力学系の双曲型固定点（安定な方向と不安定な方向を持つ固定点）の近傍で成り立つ一般的な事実を適用したものである [T26]．軌道の収束という大局的な性質は仮定しているので，ここで証明することは固定点付近の局所的な内容だけとなり，それゆえ既存の一般論が適用可能である．

命題 D.4 ([24, Proposition 3.8])　$\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点で $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ ならば $0 < \rho < 1$, $C > 0$ なる定数が存在して

$$|X_{n,I}(\mathbf{x}) - x_{c,I}| \leqq C\rho^n,\quad n \in \mathbb{Z}_+,\ I \in \mathcal{I}_d\,.$$

◇

注 D.5　本書では用いないが，以下の証明から ρ は

$$\max\{\lambda^{-1}, |\lambda_2|\} < \rho < 1,$$

を満たす任意の実数に対して成り立つことが分かる．ここで λ_2 は $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の固有値のうち λ についで絶対値の大きいものである．　◇

証明　ここだけの記号で $\mathcal{I}_d \times \mathcal{I}_d$ 行列 B（たとえば $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$）と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ に対して通常の行列と縦ベクトルの積，すなわち，第 I 成分が $\displaystyle\sum_{J \in \mathcal{I}_d} B_{IJ} x_J$ なるベクトルを $B \cdot \mathbf{x}$ と書くことにする．

$\mathbf{\Phi}$ は多項式で 1 次の項の係数は (6.32) の $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ だから，テーラーの定理から

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_c + \mathcal{J}(\mathbf{x}_c) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \tag{D.11}$$

とおくとき，θ: $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d} \to \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ について

$$|\theta(\eta)| \leqq C_1|\eta|^2, \quad |\eta| \leqq 1, \tag{D.12}$$

となる正定数 C_1 が存在する．

(FP2) により $\Lambda = Q\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)Q^{-1}$ が対角行列となる正則行列 Q が存在する．$\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の固有値のうち絶対値が 1 より大きいものは (FP2) により λ ただ一つであるが，説明を初等的にするためにそれが Λ の $(1,1)$ 成分となるように Q をとっておく．$\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ は線形空間 $V = \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上の線形演算子（行列）である．その λ に対応する固有空間 $V_u = \{Q^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ と絶対値が 1 より小さい固有値に対応する固有空間 V_s をとると，(FP2) により絶対値が 1 の固有値はないので $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d} = V_u \oplus V_s$ （直和）である．V_u, V_s への射影演算子（行列）をそれぞれ Π_u, Π_s とする．具体的には

$$\Pi_u = Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(1,0,\ldots,0)Q$$

および $\Pi_s = I - \Pi_u$ である（I は単位行列)．ベクトル $\mathbf{x}$ の V_u, V_s への射影をそれぞれ $\mathbf{x}_u = \Pi_u\mathbf{x}$，$\mathbf{x}_s = \Pi_s\mathbf{x}$，とおいて，$\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上のノルム $|\cdot|_*, |\cdot|_0$ を

$$|\mathbf{x}|_* = |Q^{-1}\cdot\mathbf{x}|, \quad |\mathbf{x}|_0 = \max\{|\mathbf{x}_u|_*,\ |\mathbf{x}_s|_*\},$$

で定義し，$\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 行列 B に対して

$$\|B\|_* = \sup_{|\mathbf{x}|_*=1} |B\cdot\mathbf{x}|_*$$

で行列の集合の上のノルム $\|\cdot\|_*$ を定義する．$\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ を V_u, V_s へ制限（射影）した演算子をそれぞれ $\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_u, \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_s$ とおく．すなわち，

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_u = \Pi_u\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)\Pi_u\,, \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_s = \Pi_s\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)\Pi_s\,.$$

そして

$$\alpha = \max\{\|\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_s\|_*\,,\ \lambda^{-1}\} \tag{D.13}$$

とおく（注 D.5 の記号で書けば $\alpha = \max\{|\lambda_2|, \lambda^{-1}\}$）と，(FP2) より $0 < \alpha < 1$ なので $0 < \alpha + \kappa < 1$ なる $\kappa > 0$ がとれる．$\rho = \alpha + \kappa$ と選ぶ．(D.12) より，$\delta > 0$ が存在して，

$$|\theta(\eta)|_0 \leqq \kappa|\eta|_0, \quad |\eta|_0 \leqq \delta, \tag{D.14}$$

とできる．$\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ なので，この δ に対して n_0 を十分大きくとって

$$|\mathbf{X}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_c|_0 \leqq \delta, \quad n \geqq n_0 ,$$

とできる．$\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_{n_0}(\mathbf{x})$ とおく．(D.11) と $|\cdot|_*$, $|\cdot|_0$ の定義と (D.13), (D.14) から

$$\begin{aligned}|(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c)_s|_* &\leqq \|\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_s\|_* |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)_s|_* + |(\theta(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c))_s|_* \\ &\leqq (\alpha + \kappa)|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 = \rho|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 . \end{aligned} \tag{D.15}$$

次に $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 > |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)_u|_*$ すなわち

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 = |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)_s|_* \tag{D.16}$$

であることを証明する．もし $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 = |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c)_u|_*$ とすると，再び (D.11), (D.13), (D.14) から

$$\begin{aligned}|(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c)_u|_* &\geqq \lambda|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)_u|_* - |\theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)_u|_* \\ &\geqq (\alpha^{-1} - \kappa)|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 \\ &> \rho^{-1}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 . \end{aligned} \tag{D.17}$$

最後の変形で，$0 < \rho = \alpha + \kappa < 1$ から $\alpha^{-1} - \kappa > (\alpha + \kappa)^{-1}$ となることを用いた．(D.17) と (D.15) および $0 < \rho < 1$ から

$$|(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c)_u|_* > |(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c)_s|_*$$

となるので，帰納法によって (D.17) を繰り返すと，

$$|\mathbf{X}_n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c|_0 \geqq \rho^{-n}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 , \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{n\to\infty} \rho^{-n} = \infty$ なのでこれは $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ に反する．よって (D.16) が成り立つ．

同様の議論で (D.16) と類似の式

$$|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c|_0 = |(\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c)_s|_*$$

を得るので (D.15) から $|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c|_0 \leqq \rho|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0$．再び帰納法によって

$$|\mathbf{X}_n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_c|_0 \leqq \rho^{n}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_c|_0 , \quad n \in \mathbb{N},$$

を得るので命題 D.4 を得る． □

命題 D.4 によって self-avoiding 固定点に収束する軌道は十分な速さで固定点に収束することから，くりこみ写像の微分写像を λ によってスケールしたもの $\lambda^{-n}\mathcal{J}_n(\mathbf{x})$ も収束することが分かる，というのが次の命題である．微分写像は拡張された意味の平

均歩数の収束を意味し，この節 §D の最終的な目標であった定理 6.26，すなわち歩数分布の分布の収束，の本質的な鍵となる．

§5 では対応する議論はほとんど必要なく，歩数分布の収束から技術的な議論を始めることができた．一つの違いは，ここではくりこみ群が多次元（多変数）であるために命題 D.4 のように収束の速さに議論を要することだが，もう一つ重要なのは，§5 では固定点直上だけで議論していたのに対して，ここでは（歩数を固定した path の集合の上の一様分布を考えているため）canonical surface が固定点と離れている点である．それゆえ平均歩数の収束も自明ではなくなる．

命題 D.6　$\mathbf{x}_c$ が self-avoiding 固定点で $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ ならば (6.43) が成り立つ $f_d \times f_d$ 行列 $\Lambda(\mathbf{x})$ が存在する．その各要素は非負で

$$\Lambda(\mathbf{x})_{I,(1)} > 0, \quad I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}. \tag{D.18}$$

◇

証明　まず，(FP2) と (D.4) から $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ のとき (6.43) の極限が存在する．

平均値の定理から，$0 < \theta < 1$ なるある θ を用いて $\mathbf{u} = \mathbf{x}_c + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)\theta$ とおくとき，

$$\mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}_{IJ}(\mathbf{x}_c) = \sum_{K \in \mathcal{I}_d} \frac{\partial \mathcal{J}_{IJ}}{\partial x_K}(\mathbf{u})\,(x_K - x_{c,K}), \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,, \tag{D.19}$$

と書ける．$\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ なので $\mathbf{X}_m(\mathbf{x})$ は m が十分大きければ $\mathbf{x}_c$ の近くにいるので，特に有界領域の中にいる．したがって，ある定数 $M > 0$ があって $0 < \theta_m < 1$ なる任意の θ_m, $m \in \mathbb{N}$, に対して

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}_{IJ}}{\partial x_K}(\mathbf{u}) \right| \leqq M, \quad I, J, K \in \mathcal{I}_d\,,\ \mathbf{u} = \mathbf{x}_c + (\mathbf{X}_m(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_c)\theta_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

とできる．これと (D.19) と命題 D.4 から

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{X}_m(\mathbf{x})) - \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)\| \leqq C'\rho^m,\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

なる $C' > 0$ と $0 < \rho < 1$ が存在する（もちろん，ρ は命題 D.4 の ρ と等しくとることができる）．よって，命題 D.3 において

$$A_n = \mathcal{J}(\mathbf{X}_n(\mathbf{x})) \tag{D.20}$$

および $A = \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ ととれば極限 (6.43) の存在が従う．

(D.18) を証明するために，命題 D.4 の証明と同様に，(FP2) により $\Lambda = Q\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)Q^{-1}$ が対角行列となる正則行列 Q をとり，$\Lambda_{II} = \lambda$ なる $I \in \mathcal{I}_d$ をとると，Q^{-1} の列 I は (FP2) に仮定された $A = \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)$ の右固有ベクトル $\mathbf{v}_R$ にとれ，Q の行 I は左固有ベクトル $\mathbf{v}_L$ にとれる．よって，命題 D.3 において A_n を (D.20) に選ぶと，$v_{R,I} > 0$ ならば十分大きな m に対して $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} A_{n+m}A_{n+m-1}\cdots A_{m+1}$ の (I, J) 成分は，全ての

$J \in \mathcal{I}_d$ に対して正になるので，特に $J=(1)$ に対して正になる．また，命題 6.12 から，$\Phi_{(1)}(\mathbf{x})$ は ${x_{(1)}}^2$ という項を持つので $A_{n,(1),(1)} > 0$ であり，それゆえ $A_m A_{m-1} \cdots A_1$ の $((1),(1))$ 成分も正である．最後に補題 D.2 から $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ ならば $v_{R,I} > 0$ である．以上から (D.18) が分かる． □

平均歩数が収束することが分かったので，次に歩数分布の収束を証明する．次の命題は，[24, Proposition 4.4] の議論に従って，歩数分布の特性関数および母関数が収束することを示す．§5 の問題との対比ではこの命題が定理 B.1 に対応するが，多変数になったためにスケールを正しく評価するノルム $|\cdot|_*$ を導入することと，軌道が動く ($\mathbf{X}_n$ の値が n とともに変化する）ことのために，複雑になる．

$n \in \mathbb{Z}_+$ と $\mathbf{x} = (x_I,\ I \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ と $\mathbf{t} = (t_I,\ I \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ に対して，

$$\mathbf{x}(n;\mathbf{t}) = (x_I \exp(\lambda^{-n} t_I),\ I \in \mathcal{I}_d), \tag{D.21}$$

のように少し横着して書くことにする．

命題 D.7 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ ならば $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ は $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ について広義一様収束する．さらに以下が成り立つ．

(i) $I \in \mathcal{I}_d$ が $x_{c,I} = 0$ を満たすならば，すなわち，$I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,I}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t})) = 0, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}.$$

(ii) $\varphi^* = \varphi^*_{\mathbf{x}} = (\varphi^*_{\mathbf{x},I}\,,\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$\varphi^*_{\mathbf{x},I}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_{c,I}} \lim\limits_{n\to\infty} X_{n,I}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, & I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c} \text{ のとき}, \\ 0, & I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c} \text{ のとき}, \end{cases}$$

によって定義する．このとき，φ^* は正則で

$$x_{c,I}\varphi^*_I(\lambda\mathbf{t}) = \Phi_I(\mathbf{x}_c \varphi^*(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},\ I \in \mathcal{I}_d\,, \tag{D.22}$$

を満たす（ここで，Φ_I の変数の記号法は定理 6.26 の (6.45) に準じる）．さらに，

$$x_{c,I}\,\frac{\partial \varphi^*_I}{\partial t_J}(\mathbf{0}) = x_J\,\Lambda_{IJ}(\mathbf{x}), \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,,$$

が成り立つ．ここで Λ は定理 6.26 の (6.43) に与えたものである． ◇

証明 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ に対して

$$|\mathbf{z}|_* = \sum_{I \in \mathcal{I}_d} v_{L,I}\,|z_I|,$$

とおく．ここで $v_{L,I}$ は (FP2) で存在を仮定されている左固有ベクトル．(FP2) から $|\cdot|_*$ がノルムであることはすぐ分かる（一意性，$|a|_* = 0$ から $a = 0$ が従うこと，は $v_{L,I} > 0$，

$I \in \mathcal{I}_d$, から言える）．行列 $\mathcal{J}$ の各成分は非負なので，$|(\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)\,\mathbf{z})_I| \leqq \sum_{J\in\mathcal{I}_d} \mathcal{J}(\mathbf{x}_c)_{IJ}\,|z_J|$, $I \in \mathcal{I}_d$，から

$$|\mathcal{J}(\mathbf{x}_c)\,\mathbf{z}|_* \leqq \lambda |\mathbf{z}|_*\,, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \tag{D.23}$$

を得る．さて，$\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ と $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ に対して $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}_c + \delta_n + \mathbf{z}_n$，すなわち

$$\delta_n = \mathbf{X}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_c, \quad \mathbf{z}_n = \mathbf{X}_n(\mathbf{x}+\mathbf{z}) - \mathbf{X}_n(\mathbf{x}), \tag{D.24}$$

とおく．平均値の定理と (D.23) から，n と $\mathbf{z}$ によらない正定数 C_1 が存在して，

$$|\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_c + \delta_n + \mathbf{z}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_c + \delta_n)|_* \leqq \lambda(1 + C_1|\delta_n|_*)(1 + C_1|\mathbf{z}|_*)|\mathbf{z}|_*\,, \qquad |\mathbf{z}|_* \leqq 1,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{D.25}$$

命題 D.4 から定数 $C_2 > 0$ と $0 < \rho < 1$ が存在して

$$|\delta_n|_* \leqq C_2 \rho^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{D.26}$$

となることに注意して，

$$C_3 \geqq \prod_{k=0}^{\infty} (1 + C_1 C_2 \rho^k)(1 + C_1 \lambda^{-k})$$

を満たす $C_3 > 0$ をとる（$0 < \rho < 1 < \lambda$ なので左辺の無限積が収束するので，そのような C_3 が存在する）．(D.25) と (D.26) を用いれば（§B.1 の定理 B.1 の証明で用いたのと類似の）帰納法によって

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}_k|_* &\leqq \lambda^k |\mathbf{z}|_* \prod_{j=0}^{k-1} (1 + C_1 C_2 \rho^j)(1 + C_1 \lambda^{-(n-j)}) \\ &\leqq C_3 \lambda^k |\mathbf{z}|_*\,, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d};\ |\mathbf{z}|_* \leqq C_3^{-1}\lambda^{-n},\ n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{D.27}$$

が成り立つ．

(D.26) と (D.27) を (D.24) に代入すれば，

$$|X_{n,I}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))|_* \leqq C_4\,, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d};\ |t|_* < \delta, \tag{D.28}$$

を満たす定数 $\delta > 0$ と $C_4 > 0$ が存在することが分かる．ここで (D.21) の記号法を用いた．$X_{n,I}$ たちは正係数多項式なので，(D.28) は $\Omega = \{t \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d} \mid |t|_* < \delta\}$ でも成り立つ．すなわち，$\{X_{n,I}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t})) \mid n \in \mathbb{Z}_+,\ I \in \mathcal{I}_d\}$, は Ω 上の正則関数の正規族をなす．よって，$n \to \infty$ で広義一様収束する部分列の極限が部分列によらないことを言えば $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ は $n \to \infty$ で Ω 上で広義一様収束する [T25]．これを言うためには，$\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ のテーラー展開の係数が $n \to \infty$ で収束することを言えば十分である．そこで

$$X_{n,I}(\mathbf{x}(n\ \mathbf{t})) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}} a_{n,I}(\mathbf{k}) \prod_{I\in\mathcal{I}_d} t_I^{k_I} \tag{D.29}$$

とおいてテーラー係数 $a_{n,I}(\mathbf{k})$ たちを定義すると，まず，仮定 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ によって

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,I}(\mathbf{0}) = x_{c,I}, \quad I \in \mathcal{I}_d. \tag{D.30}$$

次に $I \in \mathcal{I}_d$ に対して $\mathbf{e}^{(I)} \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}$ を $\mathbf{e}_I^{(I)} = 1$ および $J \neq I$ のとき $\mathbf{e}_J^{(I)} = 0$ と定義すると命題 D.6 から

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,I}(\mathbf{e}^{(J)}) = \Lambda(\mathbf{x})_{IJ}\, x_J, \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,. \tag{D.31}$$

さらに，(D.29) をくりこみ群 (6.27) に代入して $n \to \infty$ とすると，(D.30) および (D.31) から始まる $\mathbf{k}$ に関する帰納法によって，全てのテーラー係数が収束すること，すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_{n,I}(\mathbf{k})$ が全ての $I \in \mathcal{I}_d$ と $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}$ に対して存在することが分かる（もう少し詳しく言うと，各 Φ_I は多項式でその各項は 2 次以上なので，(D.29) を (6.27) に代入した式において $\mathbf{t}$ の各べきの係数を両辺で比べるとき，右辺は $\mathbf{t}$ の低次のべきの係数になっていて，係数は低次のべきの係数から順に定まる．そこで (D.31) の収束から始めて帰納的に高次のべきの係数の収束が得られる）．

こうして $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ が Ω 上で広義一様収束することが分かった．その極限を $\mathbf{X}^*(t)$ とする：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t})) = \mathbf{X}^*(t), \quad t \in \Omega.$$

(6.27) において $n \to \infty$ とすることで

$$\mathbf{X}^*(\lambda\mathbf{t}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^*(\mathbf{t})), \quad \mathbf{t} \in \Omega, \tag{D.32}$$

を得る．そこで，$R > 0$ を任意にとるとき，対応して m を $\lambda^{-m} R < \dfrac{1}{2}\delta$ となるように選ぶと，再び (6.27) から

$$\mathbf{X}_{n+m}(\mathbf{x}(n+m;\mathbf{t})) = \mathbf{X}_m(\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\lambda^{-m}\mathbf{t}))), \quad |\mathbf{t}| \leqq R,$$

となるので，右辺で $n \to \infty$ が一様収束することから左辺より $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ が $n \to \infty$ のとき $|\mathbf{t}| \leqq R$ で一様収束する．R は任意だから，$\mathbf{X}_n(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))$ は $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ で広義一様収束し，その極限 $\mathbf{X}^*(\mathbf{t})$ は正則関数になり，(D.32) が $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ で成り立つ．

次に，$J \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$，すなわち，$\lim_{n\to\infty} X_{n,J}(\mathbf{x}) = x_{c,J} = 0$，とする．$X_{n,J}$ は正係数多項式なので $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ ならば

$$|X_{n,J}(\mathbf{x}(n;\sqrt{-1}\mathbf{t}))| \leqq X_{n,J}(\mathbf{x})$$

となるから

$$X_J^*(\sqrt{-1}\mathbf{t}) = \lim_{n\to\infty} X_{n,J}(\mathbf{x}(n;\sqrt{-1}\mathbf{t})) = 0\,.$$

このことと X_J^* が $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ で正則関数であることから

$$\lim_{n\to\infty} X_{n,J}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t})) = X_J^*(\mathbf{t}) = 0, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},$$

を得る．したがって，$\varphi^* = \varphi_{\mathbf{x}}^*$ を定理の主張のように定義すると，

$$X_I^*(\mathbf{t}) = x_{c,I}\, \varphi_I^*(\mathbf{t}), \quad t \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \ I \in \mathcal{I}_d,$$

となるので，(D.32) から (D.22) を得る．このことと (D.31) から φ^* のヤコビ行列に関する主張も従う． □

定理 6.26 の証明 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ とし，$x_{c,I} \neq 0$ なる I を選ぶ．

$(\lambda^{-n} s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の $\mu_{\mathbf{x},n,I}$ の下での結合分布を $p_{\mathbf{x},n,I}$ と書く．その母関数は (6.26) と (6.42) によって

$$\int_0^\infty e^{\mathbf{t}\cdot\xi} p_{\mathbf{x},n,I}[d\xi] = \frac{X_{n,I}(\mathbf{x}(n;\mathbf{t}))}{X_{n,I}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \tag{D.33}$$

と書ける．ここで $\mathbf{x}(n;\mathbf{t})$ は (D.21) で採用した記号である．いま問題にしている確率空間は（極限をとる前は）有限集合上の確率空間なので (D.33) で ξ についての積分の記号で書いたのは実際は有限和だから，(D.33) は全ての複素数 $\mathbf{t}$ に対して定義（有限値）される．命題 D.7 と (DA1) を (D.33) に用いることで右辺は命題 D.7 の $\varphi_I^*(\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{x},I}^*(\mathbf{t})$ に $\mathbf{t}$ について広義一様収束することが分かるから，$p_{\mathbf{x},n,I}$ は $\varphi_I^*(\mathbf{t})$ を母関数とする確率測度 $p_{\mathbf{x},I}^*$ に弱収束する．

よって，定理 6.26 の主張のうち $\overline{p}_{\mathbf{x},(1)}^*$ の密度の存在と正値性以外については命題 D.6 と命題 D.7 で事実上証明済みである．特に，(6.44) が φ^* を定めるという定理の主張は，(6.44) によってそのテーラー級数の係数が低い次数の係数から帰納的に定まることによって得られる（詳しく言うと命題 D.7 の証明の中の (D.31) の少し下の議論と同様の議論によって (6.44) の両辺で $\mathbf{t}$ の等しいべきの項の係数を比べたとき右辺は φ^* のテーラー級数の左辺より低い次数の係数が現れるので，低い次数の項の係数から帰納的に決まる）．

あとは $\overline{p}_{\mathbf{x},I}^*$ が正値の C^∞ 級密度関数を持つことの証明だけが残っている．このために補題を用意する．$\lambda^{-n} L$ の $\mu_{\mathbf{x},n,I}$ の下での分布を $\overline{p}_{\mathbf{x},n,I}$ とおく．その母関数は (6.24) と (D.33) から

$$\int_0^\infty e^{t\xi} \overline{p}_{\mathbf{x},n,I}[d\xi] = \frac{X_{n,I}(\mathbf{x}(t\mathbf{e}))}{X_{n,I}(\mathbf{x})}, \quad t \in \mathbb{C}, \tag{D.34}$$

となる．ここで，$\mathbf{e} = (e_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ は

$$e_J = |J|, \quad J \in \mathcal{I}_d\,, \tag{D.35}$$

で与えられるベクトルである．

(D.33) 以降で証明したことから (D.34) は $n \to \infty$ で

$$g_I(t) = g_{\mathbf{x},I}(t) = \varphi_I^*(t\mathbf{e}) \tag{D.36}$$

に t について $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束し，$\overline{p}_{\mathbf{x},n,I}$ は g_I を母関数とする確率測度 $\overline{p}_{\mathbf{x},I}^*$ に弱収束する．

命題 D.7 からさらに，

$$x_{c,I}\,\frac{dg_I}{dt}(0) = x_{c,I} \int_0^\infty \xi \overline{p}_{\mathbf{x},I}^*[d\xi] = \sum_{J\in\mathcal{I}_d} e_J\, x_J\, \Lambda_{IJ}(\mathbf{x}), \quad I \in \mathcal{I}_d\,, \tag{D.37}$$

および

$$x_{c,I}g_I(\lambda t) = \Phi_I(\mathbf{x}_c\mathbf{g}(t)), \quad I \in \mathcal{I}_d,\ t \in \mathbb{C}, \tag{D.38}$$

を得る．ここで，Φ_I の変数は定理 6.26 の (6.45) の書き方に従った．また，$x_{c,J} = 0$ ならば $g_J = 0$ となることも命題 D.7 から分かっている．

補題 D.8　(i) $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ と $\mathbf{x} \in \Xi_d \cap \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ に対して $M_I = M_I(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \xi \overline{p}^*_{\mathbf{x},I}[d\xi]$ とおくと $M_I > 0$．

(ii) $\mathbf{x} \in \Xi_d \cap \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ のとき，$I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ に対して $\overline{p}^*_{\mathbf{x},I}$ は単位分布（1 点に集中した分布）ではない．言い換えると分散が正である．すなわち，$V_I = V_I(\mathbf{x}) := \int_0^\infty (\xi - M_I(\mathbf{x}))^2 \overline{p}^*_{\mathbf{x},I}[d\xi]$ とおくと $V_I > 0$．

(iii) $\mathbf{x} \in \Xi_d \cap \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$ のとき，正定数 C_1 と C_2 がとれて

$$\max_{I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}} |g_I(\sqrt{-1}t)| \leqq C_2 \exp(-C_1 |t|^\nu), \quad t \in \mathbb{R},$$

が成り立つ．ここでいつもの通り $\nu = \dfrac{\log 2}{\log \lambda}$ とおいた．　◇

証明　(i) (D.37) から，

$$\int_0^\infty \xi \overline{p}^*_{\mathbf{x},I}[d\xi] \geqq e_{(1)} \frac{x_{(1)}}{x_{c,I}} \Lambda_{I\,(1)}(\mathbf{x}) > 0,$$

となる．最後のところで $e_{(1)} > 0$, $x_{(1)} > 0$, $\Lambda_{I\,(1)}(\mathbf{x}) > 0$, を用いたが，これらはそれぞれ，(D.35), $\mathbf{x} \in \Xi_d \cap \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c)$, (D.18) から得られる．

(ii) $I \in \mathcal{I}_d$ と $m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}$ に対して $b_{I,m} = \sharp\{w \in \Omega_I^{(1)} \mid \mathbf{s}(w) = m\}$ とおくと，$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}_1$ と (6.26) から

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}} b_{I,m} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},\ I \in \mathcal{I}_d\,,$$

となる．よって，$C_{I,m} = b_{I,m} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_{c,J}^{m_J}$ とおくと (D.38) から

$$x_{c,I}g_I(\lambda t) = \Phi_I(\mathbf{x}_c\,\mathbf{g}(t)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}} C_{I,m} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} g_J(t)^{m_J}, \quad t \in \mathbb{C}, \tag{D.39}$$

を得る．

背理法の仮定で，ある $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ に対して $\overline{p}_{\mathbf{x},I}$ が 1 点に集中しているとすると，その母関数は

$$g_I(t) = e^{M_I t} \tag{D.40}$$

となる．(D.39) を t について 2 階微分して $t = 0$ とおいて (D.40) を使ったのち整理すると，

$$(0 \leqq)\ \ \sum_m C_{I,m}(\lambda M_I - \sum_J m_J M_J)^2 = -\sum_m C_{I,m} \sum_J m_J V_J\,,$$

を得る．$C_{I,m}$, m_J, V_J は非負なので，$J \in \mathcal{I}_d$ のうちで，$m_J > 0$ かつ $K \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ ならば $m_K = 0$ かつ $C_{J,m} > 0$ となるような $m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{I}_d}$ が存在するものについて $V_J = 0$ となる．かみくだいて言うと，$\Phi_I(\mathbf{x})$ の項の中に，x_J のべきが正で $K \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ なる x_K だけからなるものが含まれているような $J \in \mathcal{I}_d$ 全てに対して $V_J = 0$ である．(FP3) から $J = (1)$ は全ての $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ に対してこの条件を満たしているので，$V_{(1)} = 0$ となり，したがって $\overline{p}_{\mathbf{x},(1)}$ は 1 点に集中していなければならない．(D.40) の下の議論を $I = (1)$ として繰り返し，再度 (FP3) を用いると，若干の整理の後に (D.39) から

$$x_{c,(1)} \exp(\lambda M_{(1)} t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^{\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}}} C_{(1),m} \exp(\sum_{J \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}} M_J m_J t), \quad t \in \mathbb{C},$$

を得る．他方 $\Phi_{(1)}$ は多項式なので右辺は正係数の有限和である．よってこの式が成り立つのは $C_{(1),m} > 0$ なる全ての m に対して

$$\lambda M_{(1)} = \sum_{J \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}} M_J m_J$$

となるときに限る．命題 6.12 から，

(a) $m_{(1)} = 2$ かつ $m_J = 0$, $J \neq (1)$,

(b) $m_{(1)} = d + 1$ かつ $m_J = 0$, $J \neq (1)$,

のいずれかが成り立つ m に対して $C_{(1),m} > 0$ となる．よって，$2M_{(1)} = (d+1)M_{(1)}$ となり，$d \geqq 2$ なので $M_{(1)} = 0$ である．しかし，補題 D.2 から $(1) \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ なので上の結果と合わせると $M_{(1)} > 0$ でなければならないからこれは矛盾である．

以上によって $I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ かつ $\mathbf{x} \in \mathcal{D}om(\mathbf{x}_c) \cap \Xi_d$ ならば $\overline{p}_{\mathbf{x},I}$ は 1 点には集中しないことが分かった．

(iii) 分散が正なので，命題 B.10 から特性関数は原点の近くで絶対値が 1 より真に小さい．すなわち，

$$|g_I(\sqrt{-1}t)| < 1, \quad -a < t < a, \ t \neq 0, \ I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c},$$

を満たす $a > 0$ が存在する．また，(D.39) と (FP1) と Φ_I の各項の次数が 2 以上であること（命題 6.12）から（特性関数の絶対値は 1 以下であることも用いて），

$$\max_{I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}} |g_I(\sqrt{-1}\lambda t)| \leqq \max_{I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}} |g_I(\sqrt{-1}t)|^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

を得る．よって定理 B.11 から補題の主張を得る．

以上で補題 D.8 の証明が終わった．□

定理 6.26 の証明に戻る．補題 D.8 の最後の主張から（Lévy の反転公式 (F.26) と $\int_{-\infty}^{\infty} t^n g_I(\sqrt{-1}t)\, dt$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, が有限値であることによって）$\overline{p}^*_{\mathbf{x},(1)}$ の C^∞ 級密度 $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ が存在することが分かる．

$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ が各点で正であることを言うために $g_{(1)}(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{t\xi}\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}(\xi)\,d\xi$ を (D.38) に代入して命題 6.12 を用いると,

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}(\lambda^{-1}\xi)\\ &\quad= x_{c,(1)}(\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)} * \overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)})(\xi) + {x_{c,(1)}}^d(\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)} * \overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)} * \cdots * \overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)})(\xi)\\ &\qquad\qquad + \text{非負の項たち}, \quad \xi \geqq 0,\end{aligned}$$

となる．ここで，関数の間の演算子 $*$ は畳み込み

$$(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi - \eta)\,g(\eta)\,d\eta$$

を表す．

$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ は連続で $M_{(1)} > 0$ なので，ある $\xi_0 > 0$ のある近傍で $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}(\xi) > 0$ である．さらに上の等式から，$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ が 2 点 $\xi_1, \xi_2 \geqq 0$ の近傍で正ならば $\lambda^{-1}(\xi_1 + \xi_2)$ の近傍でも正である．命題 6.20 および $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ の連続性と合わせると，$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ は 0 を端点とするある開集合で正になる．また，上の等式から $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ が $d+1$ 個の点（等しくてもかまわない）$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{d+1} \geqq 0$ で正ならば $\lambda^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{d+1})$ の近傍でも正である．命題 6.20 と合わせると，$\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},(1)}$ は $(0, \infty)$ で正になることが分かる．　□

E　Pre-d 次元 gasket 上の self-avoiding path の変位の指数

この節 §E では §6.3.3 の結果のうち後半（定理 6.28, 定理 6.29）を証明する．この節を通して次の記号を使う．$n_c:\ \Omega^{(0)} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を

$$n_c(w) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \mid w(k) \in G_n\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, L(w)\}, \quad w \in \Omega^{(0)}, \quad \text{(E.1)}$$

で定義する．明らかに，

$$2^{n_c(w)-1} < L(w) \leqq d(d+1)^{n_c(w)}, \quad w \in \Omega^{(0)}, \qquad \text{(E.2)}$$

である（右側の不等号は，有限 dSG F_n が $(d+1)^n$ 個の単位単体から成っていて self-avoiding path は一つの単位単体で高々 d 歩しかいられないことから）．

$w \in \Omega^{(0)}$ に対して $\|w\| = \max\{|w(k)| \mid k = 0, 1, 2, \ldots, L(w)\}$ とおく．ここで $|\cdot|$ は F が埋め込まれている $\mathbb{R}^d$ における通常の（ユークリッド）距離．定義から

$$2^{n_c(w)-1} < \|w\| \leqq 2^{n_c(w)} \qquad \text{(E.3)}$$

（$n_c(w)$ の定義から，w は原点 O を中心として半径 $2^{n_c(w)}$ の球の中にあって半径 $2^{n_c(w)-1}$ の球の外にある）．

E.1　定理 6.28 の証明

まず，くりこみ群解析から次の結果を追加しておく．

命題 E.1　$\mathbf{x} \in D^o$ ならば $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \max_{I \in \mathcal{I}_d} 2^{-n} \log X_{n,I}(\mathbf{x}) < 0$．　◇

証明　$n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $Y_n = \max_{I \in \mathcal{I}_d} \log X_{n,I}$ とおく．Φ_I が各項の次数が 2 以上の正係数多項式（命題 6.12）だから，正係数多項式 P_1 が存在して

$$Y_{n+1}(\mathbf{x}) \leqq 2Y_n(\mathbf{x}) + \log P_1(\exp(Y_n(\mathbf{x}))),\quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \mathbf{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d},$$

と書ける．$\mathbf{x} \in D^o$ ならば定理 6.22(ii)(iii) から $\mathbf{X}_n(\mathbf{x}) \in D^o$, $n \in \mathbb{Z}_+$, なので，特に $\{\mathbf{X}_n(\mathbf{x}) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ は有界だから n によらない実定数 M が存在して

$$Y_{n+1}(\mathbf{x}) \leqq 2Y_n(\mathbf{x}) + M,\quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{E.4}$$

と書ける．これから $2^{-n}(Y_n(\mathbf{x}) + M)$ は減少するので，

$$\varlimsup_{n\to\infty} 2^{-n}(Y_n(\mathbf{x}) + M) \leqq 2^{-n_0}(Y_{n_0}(\mathbf{x}) + M),\quad n_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

$\mathbf{x} \in D^o$ から $\lim_{n\to\infty} Y_n(\mathbf{x}) = -\infty$ も成り立つので，$\varlimsup_{n\to\infty} 2^{-n}Y_n(\mathbf{x}) = \varlimsup_{n\to\infty} 2^{-n}(Y_n(\mathbf{x}) + M) < 0$．これは命題の主張を意味する．□

λ を今まで同様 (FP2) の λ として，β_c を臨界点，$\mathbf{x}_{can}(\beta_c) = \mathbf{x}_{can,\mathcal{I}_d}(\beta_c)$ を (6.34) の通りとする．

命題 E.2　$b > 0, n \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}$, に対して $c_n = b\lambda^{-n}\sqrt{n}$ および $h_n(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}c_n} e^{-\xi^2/(2c_n^2)}$ とおく．このとき，§D.3 の中の定理 6.26 の証明の総歩数の分布 $\overline{p}_{\mathbf{x},n,I}$ とその極限分布の密度（§6.3.3 の定理 6.26 の $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x},I}$）に関して，十分大きな b に対して $\xi \in \mathbb{R}$ について一様に

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I} * h_n)(\xi) = \overline{\rho}^*_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(\xi),\quad I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c},$$

となる．ここで，

$$(\overline{p}_{\mathbf{x},n,I} * h_n)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h_n(\xi - \eta)\, \overline{p}_{\mathbf{x},n,I}(d\eta)$$

は畳み込みである．◇

証明　$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I \in \mathcal{I}_d$ に対して $(\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I} * h_n)(\xi)\, d\xi$ の特性関数を $\phi_{n,I}$，$\overline{p}_{\mathbf{x},n,I}$ の特性関数を $\overline{\varphi}_{\mathbf{x},n,I}$ とそれぞれおくと，

$$\phi_{n,I}(t) = \int e^{\sqrt{-1}\xi t}(\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I} * h_n)(\xi)\, d\xi = \overline{\varphi}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I}(t) e^{-c_n^2 t^2/2}, \tag{E.5}$$

となる．一方，(D.34) に (6.34), (6.37), (D.35), (D.21) を代入すると

$$\overline{\varphi}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I}(t) = \frac{Z_{n,I}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)}{Z_{n,I}(\beta_c)},\quad t \in \mathbb{C}, \tag{E.6}$$

を得る．(D.36) に対して分かっていることから，t について広義一様に

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I}(t) = g_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(t). \tag{E.7}$$

$$A = \{t \in \mathbb{C} \mid \mathbf{Im} t \geqq 0,\ \lambda^{-1} \leqq |t| \leqq 1\}$$

とおくと，補題 D.8 と (CS1) から，$I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ ならば $\sup_{t \in A} |g_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(\sqrt{-1}t)| < 1$ が成り立つ．それゆえ (E.6) と (CS1) から $\epsilon > 0$ を十分小さくとれば

$$|Z_{n,I}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)| = Z_{n,I}(\beta_c)|\overline{\varphi}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I}(t)| < x_{c,I} - \epsilon,$$
$$I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c},\ n = n_1, n_1 + 1, \ldots,\ t \in A, \quad \text{(E.8)}$$

を満たす n_1 が存在する．

$\mathbf{x}' = (x'_I;\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$x'_I = \begin{cases} x_{c,I} - \epsilon, & I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}, \\ 0, & I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}, \end{cases}$$

で定義すると，定理 6.22(ii)(iii) から $\mathbf{x}' \in D^o$ である．D^o は Ξ_d の開集合なので $\delta > 0$ が存在して，$\mathbf{x}'' = (x''_I;\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$x''_I = \begin{cases} x_{c,I} - \epsilon, & I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}, \\ \delta, & I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}, \end{cases}$$

で定義するとき $\mathbf{x}'' \in D^o$ となるようにできる．また，$\mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}$ の定義（§6.3.3 の (6.41)）と (CS1) から，

$$|Z_{n,I}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)| \leqq Z_{n,I}(\beta_c) < \delta, \quad I \notin \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c},\ n = n_0, n_0 + 1, \ldots,\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{(E.9)}$$

を満たす $n_0 \geqq n_1$ が存在する．よって，命題 E.1, (E.8), (E.9) から，$\mathbf{x}'' \in D^o$ に注意すると，

$$|Z_{m+n,I}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)| = |X_{m,I}(\mathbf{Z}_n(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-n}t)| \leqq X_{m,I}(\mathbf{x}'') \leqq C_1 e^{-C_2 2^m},$$
$$m \in \mathbb{Z}_+,\ n = n_0, n_0 + 1, \ldots,\ I \in \mathcal{I}_d,\ t \in A, \quad \text{(E.10)}$$

を満たす正定数 C_1 と C_2 が存在する．

$n > n_0$ なる自然数と $|t| \in [1, \lambda^{n-n_0-1})$ を満たす実数 t をとる．x を越えない最大の整数を $[x]$ と書くことにして $m = \left[\dfrac{\log |t|}{\log \lambda}\right] + 1$ とおくと，$n - m \geqq n_0$ かつ $\lambda^{-m} t \in A$ だから (E.10) と (E.5) から

$$|\phi_{n,I}(t)| \leqq \frac{|Z_{m+n-m,I}(\beta_c - \sqrt{-1}\lambda^{-(n-m)}(\lambda^{-m}t))|}{Z_{n,I}(\beta_c)}$$
$$\leqq \frac{C_1}{Z_{n,I}(\beta_c)}\, e^{-C_2 2^m} \leqq \frac{C_1}{Z_{n,I}(\beta_c)}\, e^{-C_2 |t|^\nu},$$
$$n > n_0,\ I \in \mathcal{I}_d,\ |t| \in [1, \lambda^{n-n_0-1}).$$

(6.37) と (CS1) から $\lim_{n\to\infty} Z_{n,I}(\beta_c) = x_{c,I}$，および (E.7) から $\lim_{n\to\infty} \phi_{n,I}(t) = g_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, が分かっているので，優収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-\lambda^{n-n_0-1},\lambda^{n-n_0-1}]}(t)\phi_{n,I}(t) - g_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(t)|\,dt = 0, \quad I \in \mathcal{K}_{\mathbf{x}_c}\,,$$

となる．ここで χ_A は集合 A の定義関数．一方十分大きな b に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-\lambda^{n-n_0-1},\lambda^{n-n_0-1}]}(t)\phi_{n,I}(t) - \phi_{n,I}(t)|\,dt \leqq 2\int_{\lambda^{n-n_0-1}}^{\infty} e^{-c_n^2 t^2/2}\,dt$$

$$\leqq 2\int_{\lambda^{n-n_0-1}}^{\infty} te^{-c_n^2 t^2/2}\,dt = \frac{2}{b^2 n} e^{-n(b^2\lambda^{-2n_0-2}/2-2\log\lambda)} \;\to\; 0, \quad n\to\infty,$$

となる．以上を合わせると

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_{n,I}(t) - g_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(t)|\,dt = 0,$$

となるので，反転公式によって

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |(\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,I} * h_n)(\xi) - \overline{\rho}^*_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(\xi)|$$

$$\leqq \int_{\mathbb{R}} |\phi_{n,I}(t) - \overline{\varphi}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),I}(t)|\,dt \;\to\; 0, \quad n\to\infty.$$

□

定理 6.28 の証明　上からの評価はやさしい．

$$\zeta_n = \sum_{w\in\Omega^{(0)};\, n_c(w)\leqq n} e^{-\beta_c L(w)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{E.11}$$

とおくと，命題 6.12（くりこみ群）の証明と同様の考察によって，各項の次数が高々 $d+1$ の正係数多項式 $f_1:\ \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d} \to \mathbb{R}$ で，$f_1(\mathbf{0}) = 1$ および

$$\zeta_{n+1} \leqq f_1(\mathbf{Z}_n(\beta_c))\,\zeta_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{E.12}$$

を満たすものが存在することが分かる．仮定 (CS1) から $\mathbf{Z}_n(\beta_c)$ は有界なので，

$$\zeta_n \leqq A_1 A_2^n\,, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{E.13}$$

を満たす定数 $A_1 > 0$ と $A_2 \geqq 1$ が存在する．(E.2) から $L > 2^{n_c-1}$ なので，

$$e^{-\beta_c k} N(k) \leqq \sum_{w\in\Omega^{(0)};\, L(w)\leqq k} e^{-\beta_c L(w)} \leqq \zeta_{[\log_2 k]+1} \leqq A_1 A_2\, k^{\log_2 A_2},$$

となって上からの評価が証明された．

次に下からの評価を証明する．命題 E.2 の評価の成り立つ $b>0$ をとり，

$$d_n=\sqrt{2n\log\lambda}\,c_n=\sqrt{2\log\lambda}\,b\,n\,\lambda^{-n},\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

とおく．命題 E.2 から

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big|\int_{[\xi-d_n,\xi+d_n]}h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)-\overline{\rho}^*_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),(1)}(\xi)\Big|\\&\leqq\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}\setminus[\xi-d_n,\xi+d_n]}h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)\\&\leqq\lim_{n\to\infty}h_n(d_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 n}}=0\,.\end{aligned}$$

定理 6.26(iv) から $\overline{\rho}^*_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),(1)}$ が各点で正なので，自然数 n_2 と正数 ϵ が存在して

$$\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\xi-d_n,\xi+d_n])\geqq c_n\epsilon,\quad n\geqq n_2\,,\ \xi\in[\lambda^{-1},\lambda],$$

が成り立つ．$k\in\mathbb{N}$ に対して，$n\in\mathbb{Z}_+$ を $\lambda^{-n}k\in[1,\lambda)$ を満たすようにとる．k を十分大きくとっておくことにより $n\geqq n_2$ と $d_n\leqq 1-\lambda^{-1}$ としてよい．このとき $\xi=\lambda^{-n}k-d_n$ とおくことにより

$$\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\lambda^{-n}k-2d_n,\lambda^{-n}k])\geqq c_n\epsilon$$

となる．$\overline{p}_{\mathbf{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}$ の定義（(D.34) のすぐ上と (6.42)）および，path を F_n の外にまっすぐ延長することで $\{w\in\Omega^{(n)}_{(1)}\mid L(w)\leqq k\}\to\{w\in\Omega^{(0)}\mid L(w)=k\}$ なる単射が作れること（図 E.1）に注意すると，

$$Z_{n,(1)}(\beta_c)c_n\epsilon\leqq\sum_{w\in\Omega^{(n)}_{(1)};\,k-2d_n\lambda^n\leqq L(w)\leqq k}e^{-\beta_c L(w)}\leqq e^{2\beta_c d_n\lambda^n}e^{-\beta_c k}N(k)$$

を得る．$\lambda^{-n}k\geqq 1$ から $n\leqq\dfrac{\log k}{\log\lambda}$ となり，さらに $d_n\lambda^n\leqq\sqrt{2/\log\lambda}\,b\log k$ となることに注意する．k が十分大きければ $n\geqq 1$ となるので，$\lambda^{-n}k\geqq 1$ から $c_n\geqq bk^{-1}$ も成り立つ．よって十分大きい k に対して $N(k)\geqq e^{\beta_c k}k^{-1-2b\beta_c\sqrt{2/\log\lambda}}Z_{n,(1)}(\beta_c)b\epsilon$.　□

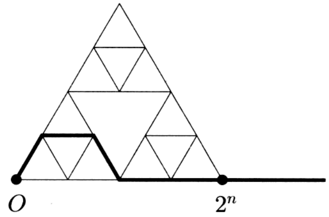


図 E.1

E.2　極端な長さの path に対する大偏差値的評価

定理 6.29 は $|w(k)| \fallingdotseq k^{\nu}$，すなわち，典型的な path が指数 ν で表される程度にぎざぎざしていることを意味するだろう．したがってその証明のために必要な一つの要素は，この関係から大きくはずれる path，たとえばまっすぐ進む path や dSG を埋め尽くしながら進むような path，は漸近的性質に効かないことを示すことである．それがこの節の内容である．

まず，くりこみ群解析から次の結果を追加しておく．

命題 E.3　(i) 正定数 C_1 と C_2 が存在して

$$Z_{m+n,I}(\beta_c+\lambda^{-n}) \leqq C_1 e^{-C_2 2^m}, \quad m,n\in\mathbb{Z}_+,\ I\in\mathcal{I}_d\,,$$

が成り立つ．

(ii) 正定数 C が存在して

$$Z_{n,I}(\beta_c-\lambda^{-n}) \leqq C, \quad n\in\mathbb{Z}_+,\ I\in\mathcal{I}_d\,,$$

が成り立つ．　◇

証明　(i) $t>0$ ならば $\mathbf{x}_{can}(\beta_c+\lambda^{-n}t)\in D^o\cap\Xi_d$ なので，命題 E.1 を用いて (E.10) を証明したときのように証明すればよい．

(ii) (6.37) に注意して，(D.35) の $\mathbf{t}=\mathbf{e}$ に命題 D.7 を適用すればよい．　□

$n,m\in\mathbb{Z}_+$ に対して

$$U_{n,m}=\sum_{\substack{w\in\Omega^{(0)};\\ n_c(w)\leqq n,\\ L(w)\geqq\lambda^{n+(m/2)}}} e^{-\beta_c L(w)} \qquad \text{および} \qquad V_{n,m}=\sum_{\substack{w\in\Omega^{(0)};\\ n_c(w)=n+1,\\ L(w)\leqq\lambda^{n-m}}} e^{-\beta_c L(w)},$$

を定義する．m が大きいとき $U_{n,m}$ は平均より長く原点に近い領域にとどまる path，$V_{n,m}$ は逆に短い path，からの総歩数の母関数への寄与を表す．

命題 E.4　正定数 C' と C'' が存在して，$n,m\in\mathbb{Z}_+$ に対して $U_{n,m}\leqq C' A_2^n e^{-C''\lambda^{m/2}}$ かつ $V_{n,m}\leqq C' A_2^n e^{-C'' 2^m}$ が成り立つ．ここで A_2 は (E.13) と同じ定数である．　◇

証明　まず $U_{n,m}$ に対する評価を証明する．$C''\leqq\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda}}{d+1}$ を満たす正定数 C'' をとる．

$$S_{n,m,I}=\sum_{w\in\Omega_I^{(n)},\ L(w)\geqq C''\lambda^{n+(m/2)}} e^{-\beta_c L(w)}, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ I\in\mathcal{I}_d\,,$$

を定義すると，(E.12) を得るのと同様の方法で次を得る：

$$U_{n+1,m}\leqq f_1(\mathbf{Z}_n(\beta_c))U_{n,m+1}+\sum_{I\in\mathcal{I}_d} S_{n,m,I}\,\frac{\partial f_1}{\partial x_I}(\mathbf{Z}_n(\beta_c))\,\zeta_n\,, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+.$$

これと (E.13) から，

$$A_2^{-n-1}U_{n+1,m} \leqq A_2^{-n}U_{n,m+1} + C_1 \sum_{I\in\mathcal{I}_d} S_{n,m,I}\,, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+.$$

となる $C_1>0$ が存在する．

(E.2) の $L(w)\leqq d\,(d+1)^{n_c(w)}$ から

$$U_{n,m}=0, \quad \lambda^{n+(m/2)} > d\,(d+1)^n,$$

となるが，$\alpha = \dfrac{\log(d+1)}{\log\lambda} - 1$ とおくとき，$m > \dfrac{2\log d}{\log\lambda} + 2\alpha n$ ならば $\lambda^{n+(m/2)} > d\,(d+1)^n$ なので $U_{n,m}=0$ となる．命題 6.20 から $\lambda < d+1$ なので $\alpha>0$ であることに注意して $k_0(n,m) = \left[\dfrac{2\alpha n - m}{2\alpha+1} + \dfrac{2\log d}{(2\alpha+1)\log\lambda}\right]$ とおくと，

$$U_{n,m} \leqq C_1 A_2^n \sum_{k=0}^{k_0(n,m)} \sum_{I\in\mathcal{I}_d} S_{n-k-1,m+k,I}\,, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+. \tag{E.14}$$

一方，命題 E.3(ii) から正定数 C が存在して

$$\begin{aligned} S_{n,m,I} &\leqq \sum_{w\in\Omega_I^{(n)},\ L(w)\geqq C''\lambda^{n+(m/2)}} e^{-(\beta_c-\lambda^{-n})L(w)} e^{-C''\lambda^{m/2}} \\ &\leqq Z_{n,I}(\beta_c-\lambda^{-n}) e^{-C''\lambda^{m/2}} \\ &\leqq C e^{-C''\lambda^{m/2}}, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+,\ I\in\mathcal{I}_d\,, \end{aligned}$$

となる．これと (E.14) から

$$U_{n,m} \leqq CC_1 \sharp\mathcal{I}_d\, A_2^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-C''\lambda^{(m+k)/2}}.$$

ここで，

$$\lambda^{(m+k)/2} \geqq \lambda^{(m-k_1)/2} + \lambda^{(k-k_1)/2}, \quad m,k\in\mathbb{Z}_+,$$

となるような自然数 k_1 が存在することに注意する．実際，

$$\lambda^{(m+k)/2} - (\lambda^{m/2-k_1} + \lambda^{k/2-k_1}) = (\lambda^{m/2} - \lambda^{-k_1/2})(\lambda^{k/2} - \lambda^{-k_1/2}) - \lambda^{-k_1}$$

は m と k について増加するので $1 \geqq 2\lambda^{-k_1/2}$ となるように k_1 を選べば十分である．よって，正定数 C' が存在して

$$\begin{aligned} U_{n,m} &\leqq CC_1 \sharp\mathcal{I}_d\, A_2^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-C''\lambda^{(k-k_1)/2}} e^{-C''\lambda^{(m-k_1)/2}} \\ &\leqq C' A_2^n e^{-C''\lambda^{m/2}}, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

次に $V_{n,m}$ に対する評価を証明する.

$$T_{n,m,I} = \sum_{w\in\Omega_I^{(n)},\ L(w)\leqq\lambda^{n-m}} e^{-\beta_c L(w)}, \quad n,m\in\mathbb{Z}_+;\ m\leqq n,\ I\in\mathcal{I}_d\,,$$

を定義して, $\mathbf{T}_{n,m} = (T_{n,m,I}\ ,\ I\in\mathcal{I}_d)$ のように書くことにすると, 再び (E.12) を得るのと同様の方法で

$$V_{n,m} \leqq (f_1(\mathbf{T}_{n,m}) - 1)\zeta_n = (f_1(\mathbf{T}_{n,m}) - f_1(\mathbf{0}))\zeta_n\,,$$

を得る. 他方, $T_{n,m,I}$ の定義の中の条件 $L(w)\leqq\lambda^{n-m}$ から,

$$T_{n,m,I} \leqq \sum_{w\in\Omega_I^{(n)}} e^{-(\beta_c+\lambda^{m-n})L(w)+1} = eZ_{n,I}(\beta_c+\lambda^{m-n}).$$

命題 E.3(i) および (E.13) と合わせれば主張を得る. □

命題 E.5 十分大きな α に対して

$$\varliminf_{k\to\infty}(\log k)^{s\alpha}k^{-s}E_k[\|w\|^{s/\nu}] > 0, \quad \text{および} \quad \varlimsup_{k\to\infty}(\log k)^{-s\alpha}k^{-s}E_k[\|w\|^{s/\nu}] < \infty,$$

が全ての $s\geqq 0$ に対して成り立つ. ここで $E_k[\cdot]$ は定理 6.29 の上で定義した k 歩の self-avoiding path 上の一様分布 $\tilde{P}_k$ に関する期待値である. ◇

証明 $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{n}(k) = \left[\frac{\log k}{\log\lambda}\right]$$

を定義する. 明らかに, $\lambda^{\tilde{n}(k)}\leqq k < \lambda^{\tilde{n}(k)+1}$ である.

$m\leqq\tilde{n}(k)$ を満たす自然数 m と k に対して, 命題 E.4 から

$$\begin{aligned}
\sharp\{w\in\Omega^{(0)} \mid L(w)=k,\ n_c(w)\leqq\tilde{n}(k)-m\} \\
&\leqq e^{\beta_c k}U_{\tilde{n}(k)-m,2m} \\
&\leqq C'\exp(\beta_c k + (\tilde{n}(k)-m)\log A_2 - C''\lambda^m) \\
&\leqq C'\exp(\beta_c k + \frac{\log A_2}{\log\lambda}\log k - C''\lambda^m).
\end{aligned}$$

これと定理 6.28 から, 十分大きな α と任意の ϵ に対して $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_k\left[n_c(w)\leqq\tilde{n}(k)-\alpha\frac{\log\log k}{\log\lambda}+\epsilon\right] \\
&\leqq C'C_1^{-1}\exp((\frac{\log A_2}{\log\lambda}-C_3)\log k - C''\lambda^{-\epsilon}(\log k)^\alpha) \\
&\leqq Ce^{-(\log k)^3}, \quad k\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

が成り立つ．これと (E.3) から，十分大きな α に対して

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[\|w\| < (\log k)^{-\alpha\nu} k^{\nu}]\, e^{(\log k)^2} \\ \leqq \lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[2^{n_c(w)} < 2(\log k)^{-\alpha\nu} k^{\nu}]\, e^{(\log k)^2} = 0\,.\end{aligned}$$

チェビシェフの不等式から $s \geqq 0$ のとき

$$E_k[\|w\|^{s/\nu}] \geqq ((\log k)^{-\alpha} k)^s (1 - \tilde{P}_k[\|w\| \leqq (\log k)^{-\alpha\nu} k^{\nu}])$$

となるので

$$\varliminf_{k\to\infty} (\log k)^{s\alpha} k^{-s} E_k[\|w\|^{s/\nu}] > 0, \quad s \geqq 0\,.$$

次に，自然数 m, k, ℓ に対して $2^{m+\ell} \geqq 2^{m-1} + 2^{\ell-1}$, $m, \ell \in \mathbb{Z}_+$, に注意すれば，命題 E.4 から

$$\begin{aligned}&\sharp\{w \in \Omega^{(0)} \mid L(w) = k,\ n_c(w) = \tilde{n}(k) + m + \ell + 2\} \\ &\quad\leqq e^{\beta_c k} V_{\tilde{n}(k)+m+\ell+1, m+\ell} \\ &\quad\leqq C' \exp(\beta_c k + (\tilde{n}(k) + m + \ell + 1)\log A_2 - C'' 2^{m+\ell}) \\ &\quad\leqq C' \exp\left(\beta_c k + \frac{\log A_2}{\log \lambda}\log k + m \log A_2 - C'' 2^{m-1}\right) A_2^{\ell+1} \exp(-C'' 2^{\ell-1}).\end{aligned}$$

これと定理 6.28 から，正定数 C が存在して

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_k\left[n_c(w) \geqq \tilde{n}(k) + \frac{\alpha}{\log 2}\log\log k\right] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{P}_k\left[n_c(w) = \tilde{n}(k) + \ell + \frac{\alpha}{\log 2}\log\log k\right] \\ &\quad\leqq \frac{C'}{C_1 A_2} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_2^{\ell} e^{-C'' 2^{\ell-1}} \exp\Bigg((\log_{\log\lambda} A_2 - C_3)\log k \\ &\qquad\qquad + \alpha\frac{\log A_2}{\log 2}\log\log k - \frac{C''}{8}(\log k)^{\alpha}\Bigg) \\ &\quad\leqq C \exp\left(\left(\frac{\log A_2}{\log\lambda} - C_3\right)\log k + \alpha \log_2 A_2 \log\log k - \frac{C''}{8}(\log k)^{\alpha}\right), \quad k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．これと (E.3) から，十分大きな α に対して

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[\|w\| \geqq (\log k)^{\alpha\nu} k^{\nu}]\, e^{(\log k)^2} \leqq \lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k[2^{n_c(w)} \geqq (\log k)^{\alpha\nu} k^{\nu}]\, e^{(\log k)^2} = 0\,.$$

$s \geqq 0$ とする．$\|w\| \leqq L(w)$ だから

$$E_k[\|w\|^{s/\nu}] \leqq ((\log k)^{\alpha} k)^s + k^{s/\nu} \tilde{P}_k[\|w\|^{1/\nu} \geqq (\log k)^{\alpha} k]$$

となるので，以上を合わせると $\varlimsup_{k\to\infty} (\log k)^{-s\alpha} k^{-s} E_k[\|w\|^{s/\nu}] < \infty$ を得る． □

E.3 反射原理

定理 6.29 の証明に要するもう一つの要素は path の端点が原点付近に戻りすぎないことの評価である．典型的な path が $|w(k)| \fallingdotseq k^{\nu}$ で表される程度に広がって（ぎざぎざ曲がって）いても，特別な k に対して隠れた理由でいっせいに原点付近に戻っていると距離と歩数の関係はぎざぎざの度合いを反映しなくなる．重複対数の法則が原点から離れているときの距離だけを見ている（$\overline{\lim}$ を評価している）のと比べると，変位の指数は（lim の存在まで主張するので）この点では少し強い主張になっている．

dSG の定義 (6.2), (6.3) から，以下で定義される自然な G の座標系（全射）π : $\{0,1,2,\dots,d\}^{\mathbb{Z}_+} \to G$ を考えることができる．まず $i=0,1,2,\dots,d$ に対して $v_{0,i} = v_i \in G_0$ の座標を $(i,0,0,0,\dots)$ とする：

$$\pi(i,0,0,0,\dots) = v_{0,i},\ i=0,1,2,3,\dots,d.$$

$n \geqq 1$ に関する帰納法によって，座標 π が

$$\{(i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},0,0,0,\dots) \mid i_k \in \{0,1,2,\dots,d\},\ k=0,1,2,\dots,n-1\}$$

の上で，その値が G_{n-1} に含まれるように定義されたとする．このとき $\pi(i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n,0,0,\dots) \in G_n$ を以下で定義する．$n=0,1,2,\dots$ と $i=0,1,2,3,\dots,d$ に対して $G_{n,i} = G_n + 2^n v_{0,i}$ とおき，全単射 $\iota_{n,i}$： $G_{n,i} \to G_n$ を $\iota_{n,i}(v) = v - 2^n v_{0,i}$ によって定義する．$\iota_{n,i}$ は頂点の間の写像だが自然に辺の間の全単射を引き起こすのでそれも同じ記号 $\iota_{n,i}$： $B_{n,i} \to B_n$ で書く．そして $j \in \{0,1,2,\dots,d\}$ と $v \in G_{n-1,j}$ に対して

$$\pi(i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},0,0,0,\dots) = \iota_{n-1,j}(v) \quad \text{のとき}$$
$$\pi(i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},j,0,0,\dots) = v$$

と定義する．この定義は $G_{n-1,0} = G_{n-1} \subset G_n$ での π の定義と整合している（定義の拡張になっている）ことは明らか．

$G \setminus \{O\}$ の各点は二つずつ座標表示を持つ．なぜなら

$$\pi(j,j,\dots,j,i,0,\dots) = \pi(i,i,\dots,i,j,0,\dots) \in G_{m,i} \cap G_{m,j},\quad 0 \leqq i < j \leqq d,\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

となるから．また $\pi(i_0,i_1,i_2,\dots) \in G_n$ ならば $i_k = 0,\ k=n+1,n+2,\dots,$ が成り立つ．

この座標系を用いて path の上の鏡映写像を定義する（図 E.2）．この写像は定理 E.7 で鏡映原理を証明するのに用いる．$i=1,2,3,\dots,d$ に対して

$$R_{0,i}:\ \{0,1,2,\dots,d\} \to \{0,1,2,\dots,d\}$$

を

$$\begin{cases} R_{0,i}(0) = i, \\ R_{0,i}(i) = 0, \\ R_{0,i}(j) = j,\ j \neq 0,i, \end{cases}$$

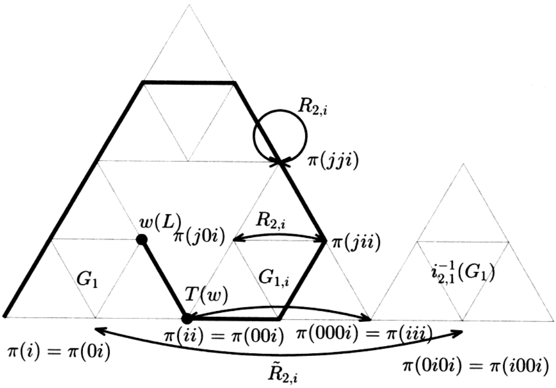


図 E.2

で定義する．

$n=1,2,3,\ldots$ と $i=1,2,\ldots,d$ に対して，$\pi(j,j,\ldots,j,i,0,0,\ldots)\in G_{n-1,i}$, $j\neq 0,i$, を含み i 座標に「垂直な」超平面に関する「半鏡映」たち $R_{n,i}:\ G\to G$, $\tilde{R}_{n,i}:\ G\to G$ を次で定義する．

$$R_{n,i}(\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots))$$
$$=\begin{cases}\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots), & (\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\notin G_{n-1,i}\text{ のとき，})\\ \pi(R_{0,i}(x_0),R_{0,i}(x_1),\ldots,R_{0,i}(x_{n-1}),x_n,0,0,0,\ldots), & \\ \qquad (\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in G_{n-1,i}\text{ かつ }x_n=i\text{ のとき．}) & \end{cases} \tag{E.15}$$

$$\tilde{R}_{n,i}(\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots))$$
$$=\begin{cases}\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots), & (\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\notin G_{n-1}\cup\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1}),\text{ のとき，})\\ \pi(R_{0,i}(x_0),R_{0,i}(x_1),\ldots,R_{0,i}(x_{n-1}),x_n,R_{0,i}(x_{n+1}),0,0,\ldots), & \\ \qquad (\pi(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in G_{n-1}\cup\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})\text{ かつ }x_n=0\text{ のとき．}) & \end{cases} \tag{E.16}$$

G_{n-1}, $G_{n-1,i}$, $\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$ は G_{n-1} のコピーで「i 軸」に沿って 1 列に並んでいて，

$$\begin{aligned}G_{n-1}\cap G_{n-1,i}&=\{\pi(\overset{0,1,2}{0,0,0},\ldots,0,\overset{n}{i},0,0,\ldots)\}\\ &=\{\pi(\overset{0,1,2}{i,i,i},\ldots,\overset{n-1}{i},0,0,0,\ldots)\},\end{aligned} \tag{E.17}$$

および

$$
\begin{aligned}
G_{n-1,i}\cap\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1}) &= \{\pi(\overset{0,1,2}{0,0,0},\dots,0,\overset{n+1}{i},0,0,\dots)\} \\
&= \{\pi(\overset{0,1,2}{i,i,i},\dots,i,\overset{n}{i},0,0,\dots)\},
\end{aligned}
\tag{E.18}
$$

のようにそれぞれ 1 点でつながっている．座標系の定義から $G_{n-1,i}$ の点は $\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},i,0,0,\dots)$ という形の座標表示を持つ．特に $G_{n-1}=G_{n-1,0}$ は $i=0$ で，x_n 以降が 0 である．また，$\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$ の点は $\pi(x_0,\dots,x_{n-1},0,i,0,0,\dots)$ なる座標表示を持つ．

命題 E.6　$R_{n,i}$ と $\tilde{R}_{n,i}$ は単射であって，さらに，以下が成り立つ．

(i) $x\in G_{n-1}$ ならば $\tilde{R}_{n,i}(x)\in\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$.
(ii) $(x,y)\in B_{n-1}$ ならば $(\tilde{R}_{n,i}(x),\tilde{R}_{n,i}(y))\in B$.
(iii) $x\in G_{n-1}\cap G_{n-1,i}$ ならば $R_{n,i}(x)=\tilde{R}_{n,i}(x)$.
(iv) $x\in G_n$ ならば $R_{n,i}(x)\in G_n$.
(v) $x\in G_{n-1,i}\cap\bigcup_{j\neq 0,i}G_{n-1,j}$ ならば $R_{n,i}(x)=x$.
(vi) $(x,y)\in B_{n-1,i}$ ならば $(R_{n,i}(x),R_{n,i}(y))\in B$. ◇

証明　定義から $R_{n,i}^2(x)=\tilde{R}_{n,i}^2(x)=x$, $x\in G$, なので特に $R_{n,i}$, $\tilde{R}_{n,i}$ は単射である．

(i) $x\in G_{n-1}$ ならば $x=\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},0,0,0,\dots)$ という形の座標を持つので (E.16) と合わせると $\tilde{R}_{n,i}(x)=\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},0,i,0,\dots)$ となるが，これは $\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$ の点である．

(ii) $(x,y)\in B_{n-1}$ とすると，$x,y\in G_{n-1}$ なのでその座標は

$$x=\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},0,0,0,\dots),\quad y=\pi(y_0,y_1,\dots,y_{n-1},0,0,0,\dots),$$

と書ける．(E.16) と合わせると

$$\tilde{R}_{n,i}(x)=\pi(R_{0,i}(x_0),R_{0,i}(x_1),\dots,R_{0,i}(x_{n-1}),0,i,0,0,\dots)\in\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1}),$$

および，y についても同様の式が成り立つ．$\iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$ は G_{n-1} と合同なので，あとは

$$(\pi(R_{0,i}(x_0),\dots,R_{0,i}(x_{n-1}),0,0,\dots),\pi(R_{0,i}(y_0),\dots,R_{0,i}(y_{n-1}),0,0,\dots))\in B_{n-1}$$

を証明すれば十分である．B_{n-1} の定義と $(x,y)\in B_{n-1}$ から，$x_{n-1}=y_{n-1}$ および

$$(\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-2},0,0,0,\dots),\pi(y_0,y_1,\dots,y_{n-2},0,0,0,\dots))\in B_{n-2}$$

としてよい．帰納法によって，

$$
\begin{aligned}
&(\pi(x,0,0,\dots),\pi(y,0,0,\dots))\in B_0 \quad \text{ならば} \\
&\qquad (\pi(R_{0,i}(x),0,0,\dots),\pi(R_{0,i}(y),0,0,\dots))\in B_0,
\end{aligned}
$$

を証明すればよいことになるが，これは $F_0=(G_0,B_0)$ の定義から明らか．

(iii) (E.17) を (E.15) と (E.16) に代入して，

$$\begin{aligned}R_{n,i}(x) &= R_{n,i}(\pi(\overset{0,1,2}{0,0,0},\dots,0,\overset{n}{i},0,0,\dots))\\ &= \pi(\overset{0,1,2}{i,i,i},\dots,i,\overset{n}{i},0,0,\dots),\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{n,i}(x) &= \tilde{R}_{n,i}(\pi(\overset{0,1,2}{i,i,i},\dots,\overset{n-1}{i},0,0,0,\dots))\\ &= \pi(\overset{0,1,2}{0,0,0},\dots,0,0,\overset{n+1}{i},0,\dots)\\ &= \pi(\overset{0,1,2}{i,i,i},\dots,i,\overset{n}{i},0,0,\dots)\end{aligned}$$

を得るので，$R_{n,i}(x) = \tilde{R}_{n,i}(x)$ を得る．

(iv) $x \in G_n$ ならば x は $x = \pi(x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ という形の座標を持つ．よって (E.15) から $R_{n,i}(x)$ も同様の座標を持つから，$R_{n,i}(x) \in G_n$ となる．

(v) (E.17) と (E.18) から x は $x = \pi(j, j, \dots, j, \overset{n}{i}, 0, 0, \dots)$, $j \neq 0, i$. という形の座標を持つ．よって (E.15) から $R_{n,i}(x) = x$ を得る．

(vi) これは (ii) と同様にして証明できる．□

$|w(L(w))| < 2^{n_c(w)-1}$ を満たす self-avoiding path $w \in \Omega^{(0)}$ に対して，「鏡映」$R(w) \in \Omega^{(0)}$ を，$|R(w)(L(R(w)))| > 2^{n_c(R(w))-1}$ となるように定義したい（左辺は $R(w)$ の端点間のユークリッド距離）．これを (E.15) と (E.16) を用いて以下のように定義することができる．

$w = (w(0), w(1), \dots, w(L(w))) \in \Omega^{(0)}$ が

$$w(L(w)) \in G_{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{d} G_{n-1,i}\,,\ \text{ただし}\ n = n_c(w), \tag{E.19}$$

を満たしているとき，path $R(w)$ を次のように定義する．$T(w)$ を

$$w(k) \in G_{n-1},\ T(w) \leqq k \leqq L(w),\ \text{かつ}\ w(T(w)-1) \notin G_{n-1}\,,$$

を満たす自然数とする．条件 (E.19) によってそのような自然数が（ただ一つ）存在する．$w(T(w)) \in G_{n-1}$ なので $w(T(w)-1) \in \bigcup_{i=1}^{d} G_{n-1,i}$ である．$i(w) \in \{1, 2, \dots, d\}$ を $w(T(w)-1) \in G_{n-1,i(w)}$ となるものにとる．明らかにそのような自然数もただ一つ存在する．さらに $T(w)$ と $i(w)$ の定義から

$$w(T(w)) \in G_{n-1} \cap G_{n-1,i(w)}\,. \tag{E.20}$$

$R(w)$ を

$$R(w)(k) = \begin{cases} R_{n,i(w)}(w(k)), & 0 \leqq k < T(w), \\ \tilde{R}_{n,i(w)}(w(k)), & T(w) \leqq k \leqq L(w), \end{cases}$$

で定義する.

定理 E.7　$|w(L(w))| < 2^{n_c(w)-1}$ を満たす $w \in \Omega^{(0)}$ に対して, $R(w) \in \Omega^{(0)}$, すなわち, O を始点とする self-avoiding path, であり, $L(R(w)) = L(w)$, $n_c(R(w)) = n_c(w)+1$, $2^{n_c(w)} < |R(w)(L(w))|$ を満たす. ◇

証明　自明でないのは $R(w)$ が self-avoiding path だという点だけである. 他の性質は「鏡映」写像のこれまでの定義から明らかである.

まず w が self-avoiding のとき $R(w)$ も self-avoiding であることを示す. $n = n_c(w)$ とおく. (E.20) と命題 E.6(iii) から

$$R_{n,i(w)}(w(T(w))) = \tilde{R}_{n,i(w)}(w(T(w))). \tag{E.21}$$

命題 E.6 から $R_{n,i}$ と $\tilde{R}_{n,i}$ は単射なので, path の断片 $w_1 = \{R(w)(k),\ 0 \leqq k \leqq T(w)\}$ および $w_2 = \{R(w)(k),\ T(w) \leqq k \leqq L(w)\}$ はそれぞれは self-avoiding である. あとは w_1 と w_2 が交点を持たないことを言えばよい.

$T(w)$ の定義から $T(w) \leqq k \leqq L(w)$ で $w(k) \in G_{n-1}$ である. これと命題 E.6(i) から $\tilde{R}_{n,i}(w(k)) \in \iota_{n,i}^{-1}(G_{n-1})$ となるので, 特に, $w_2 \cap G_n = \{R_{n,i}(w(T(w)))\}$ である. 他方命題 E.6(iv) から $w_1 \subset G_n$ なので, w_1 と w_2 は交点を持たない. 以上より $R(w)$ は self-avoiding である.

あとは $R(w)$ が path であること, すなわち,

$$(R(w)(k), R(w)(k+1)) \in B,\ k = 0, 1, 2, \ldots, L(w)-1, \tag{E.22}$$

を言えばよい. $T(w)$ の定義と命題 E.6(ii) から $T(w) \leqq k < L(w)$ に対して (E.22) が成り立つので, $0 \leqq k < T(w)$ とおいてよい. $T(w)$ の定義と (E.21) から $0 \leqq k \leqq T(w)$ で $R(w)(k) = R_{n,i(w)}(w(k))$ となる.

$w(k) \notin G_{n-1,i(w)}$ の場合は, $(w(k), w(k+1)) \in B$, $n = n_c(w)$, (E.20) および w が self-avoiding であることから, $w(k+1) \notin G_{n-1,i(w)}$ または $w(k+1) \in G_{n-1,i(w)} \cap \bigcup_{j \neq 0, i(w)} G_{n-1,j}$ である. $R_{n,i(w)}$ の定義と命題 E.6(v) から, いずれの場合でも $R_{n,i(w)}(w(k+1)) = w(k+1)$ となる. また $w(k) \notin G_{n-1,i(w)}$ から $R_{n,i(w)}(w(k)) = w(k)$ も得る. よってこの場合は (E.22) が成り立つ.

残っているのは $0 \leqq k < T(w)$ かつ $w(k) \in G_{n-1,i(w)}$ となる場合であるが, $w(k+1) \notin G_{n-1,i(w)}$ ならば上記と同様の議論が可能だから, $w(k+1) \in G_{n-1,i(w)}$ と仮定してよい. よって $(w(k), w(k+1)) \in B_{n-1,i(w)}$ となるので命題 E.6(vi) から (E.22) を得る. □

系 E.8　$s \geqq 0$ かつ $k \in \mathbb{N}$ ならば

$$E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \leqq 2^{n_c(w)-1}] \leqq E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \geqq 2^{n_c(w)-1}]$$

である．ここで $E_k[\cdot]$ は定理 6.29 の主張と同じ k 歩の self-avoiding path 上の一様分布 $\tilde{P}_k$ に関する期待値である．◇

証明　$\tilde{P}_k$ の定義と定理 E.7 から

$$\begin{aligned}E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| < 2^{n_c(w)-1}] &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{s(n-1)} \tilde{P}_k[n_c(w) = n,\ |w(k)| < 2^{n-1}] \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{s(n-1)} \tilde{P}_k[n_c(w) = n+1,\ |w(k)| > 2^{n}] \\ &= 2^{-s} E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| > 2^{n_c(w)-1}] \\ &\leqq E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| > 2^{n_c(w)-1}]\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \leqq 2^{n_c(w)-1}] &= E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| = 2^{n_c(w)-1}] \\ &\quad + E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| < 2^{n_c(w)-1}] \\ &\leqq E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \geqq 2^{n_c(w)-1}]\end{aligned}$$

を得る．□

定理 6.29 の証明　§E の冒頭の定義から直ちに得られる $|w(L(w))| \leqq \|w\| \leqq 2^{n_c(w)}$, $w \in \Omega^{(0)}$, と系 E.8 から

$$\begin{aligned}2^{-s-1} E_k[\|w\|^s] &\leqq 2^{-s-1} E_k[2^{s n_c(w)}] \\ &= \frac{1}{2}(E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \leqq 2^{n_c(w)-1}] \\ &\qquad + E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| > 2^{n_c(w)-1}]) \\ &\leqq E_k[2^{s(n_c(w)-1)};\ |w(k)| \geqq 2^{n_c(w)-1}] \\ &\leqq E_k[|w(k)|^s;\ |w(k)| \geqq 2^{n_c(w)-1}] \\ &\leqq E_k[|w(k)|^s] \leqq E_k[\|w\|^s], \quad s \geqq 0,\ k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

を得る．ここで命題 E.5 を用いると，十分大きな α に対して

$$\varliminf_{k\to\infty} (\log k)^{s\alpha} k^{-s} E_k[|w(k)|^{s/\nu}] > 0, \qquad \text{かつ} \qquad \varlimsup_{k\to\infty} (\log k)^{-s\alpha} k^{-s} E_k[|w(k)|^{s/\nu}] < \infty.$$

すなわち，正定数 k_0, C, C' が存在して

$$s\log k - s\alpha\log\log k + C \leqq \log E_k[|w(k)|^{s/\nu}] \leqq s\log k + s\alpha\log\log k + C',$$
$$k \geqq k_0,\ s \geqq 0,$$

となるので定理 6.29 が証明された．　□

F　測度論と確率論の基礎事項から

起こるかもしれないこと，あるいは裏返して言えば，実際には起こらなかったこと，がどれくらい大きいかをはかるのが確率である．

有限集合の大きさをはかるには個数を数えればよい．無限集合では点の個数だと無限なので，たとえば 1cm と 2cm を区別できないが，太古の昔から量をはかる概念として，長さ，面積，体積，などがある．これら全てに共通する「量をはかる」という数学的概念の基礎を人類が抽象し終えたのはちょうど 1 世紀前のことであった．個数，長さ，面積，体積，に共通する性質，すなわち「量をはかること」を数学では測度と呼ぶ．

1 世紀前に抽象化が目指された一つの動機は，どれくらい複雑な集合（図形）に対して面積（体積，長さ）があるか，という興味だったのだろう．あるいは，面積としての積分という視点から言い換えれば，どれくらい複雑な関数に対して積分が存在するか，という問題である．測度論（ルベーグ積分論）の創始者の一人ルベーグが「紙をくしゃくしゃにしてみせた」という逸話が残っているそうである．複雑な集合でも量ははかれるはずだ（積分はあるはずだ），なぜなら面積（測度）という素朴な幾何学的な概念だからだ，ということだろう．測度の概念の上に立って，積分は測度であると定義したのがルベーグ積分である [T7]．

測度の定義（σ 加法族と σ 加法性という概念）の完成度が極めて高かったおかげで，測度論に基づく数学はわずか 100 年の間に爆発的に進歩した．一つの理由は，σ 加法性を持つ（σ 有限な）有限加法的測度が必ず測度に拡張できるという Carathéodory（または Hopf）の拡張定理によって，大きさの測れる集合（可測集合）は全て有限加法的測度という素朴な測度で近似できる，という極めて一般性の高い分かりやすい論理構成が実現したことにある．

完成度の高い測度という概念によって積分を定義したことから，積分も強力な解析手段となった．たとえば極限と積分の交換が（測度に要求される正値性という当然の弱い不等式による条件の下で）無条件に成り立つ．§F.3 で復習するいくつかの定理がこの範疇に入る基礎事項である．よく知られた他の例として，直積測度における可測集合の切り口は元の測度で可測になることから，重積分が（存在すれば）無条件に逐次積分で書ける（Fubini の定理）．

進歩のもう一つの方向は，一般化・抽象化の完成度の高さのおかげで，ユークリッド空間にとらわれることなく，たとえばフラクタルのように長さと面積の間の測度（面積と体積の間の測度）で「大きさを量る」ことができるようになったことである [T8, T18]．確率も起こりやすさをはかるという意味で測度としてとらえることができ

る．特に，現代確率論の主要な分野である確率過程論は「関数の集合の大きさ」をはかる数学である．20 世紀初頭の主要な数理物理学上の研究対象の一つだったブラウン運動は確率過程論の原点だが，ブラウン運動を数学的に基礎づけるには「関数の集合の定量」ということが決定的に重要である．定量ということを関数の集合にまで適用可能にしたのは測度論の完成と，確率を測度と見破ったコルモゴロフの卓見によるものだろう．

§1 では有限集合の上の確率のみを扱ったので個数を数えるだけですみ，測度を表に出す必要はなかったが，§2 以降では無限長の path を扱うため無限集合となり，特に，path の極限を扱うときには測度の概念は不可避である．以下この節 §F で第 I 部を読み通すのに必要な最小限の事項を復習する．補遺の他の節（第 II 部の本文の主要定理の証明も含まれている）にはこの節をやや越える内容も用いるが，それらについては [T2, T6] などの本格的な基礎教科書を参照していただきたい．

F.1　確率空間と拡張定理

確率空間

§2.1 で引用した測度論に基づく確率空間の概念について，§1.2 の記述（全体集合が有限集合で，その各要素一つからなる集合の確率が定義されている場合の確率測度の定義）と対比しながら復習する．

現代の確率論は数学的には測度論に基づいて定義される．これに従うと，確率空間とは以下の性質を満たす三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ のことである．

定義 F.1　$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が確率空間であるとは，全体集合 Ω の部分集合をいくつか集めた集合族 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}$ を定義域とする関数（集合に対して値をとるという意味で集合関数と言う）$\mathrm{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が以下の性質を持つときを言う．

(i) $\mathcal{F}$ は σ 加法族である．すなわち，次の性質を持つ．

(全体集合)： $\Omega \in \mathcal{F}$,

(補集合)： $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$,

(可算和)： $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, 3, \ldots,$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(ii) P は $\mathcal{F}$ を定義域とする確率測度である．すなわち，以下の性質を持つ．

(規格化)： $\mathrm{P}[\,\Omega\,] = 1$,

(非負値)： $\mathrm{P}[\,A\,] \geqq 0,\ A \in \mathcal{F}$,

(σ 加法性)： $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, 3, \ldots,$ が互いに共通部分を持たない，すなわち $A_i \cap A_j,\ i \neq j$，ならば $\displaystyle\mathrm{P}[\,\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_i\,]$.　◇

σ 加法性の別の言い方に測度の連続性の条件がある（同値条件の形にも書けるが，簡単のため後で引用する方向だけを書いておく）．

命題 F.2　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の可測集合の列 $E_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, が減少列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ であって，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$ を満たすならば，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \mathrm{P}[\, E_i \,] = 0$ となる．　◇

注 F.3　対偶をとれば次のように言い換えることができる：確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の可測集合の列 $E_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, が減少列 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ であって，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \mathrm{P}[\, E_i \,] > 0$ を満たすならば，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ は空ではない，すなわち，$w \in E_i$, $i \in \mathbb{N}$, を満たす $w \in \Omega$ が存在する．
◇

証明　仮定から補集合に関して $E_1^c \subset E_2^c \subset \cdots$ および $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = \Omega$ が成り立つので，合わせると

$$E_1^c \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (E_i^c \setminus E_{i-1}^c) = \Omega$$

を得る．よって σ 加法性から

$$\mathrm{P}[\, E_1^c \,] + \sum_{i=2}^{\infty} \mathrm{P}[\, E_i^c \setminus E_{i-1}^c \,] = \mathrm{P}[\, \Omega \,] = 1, .$$

左辺は通常の級数だから定義に従って変形した上で有限加法性を使う（σ 加法性があれば有限加法性もなりたつので）と

$$1 = \lim_{j\to\infty} (\mathrm{P}[\, E_1^c \,] + \sum_{i=2}^{j} \mathrm{P}[\, E_i^c \setminus E_{i-1}^c \,]) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{P}[\, E_j^c \,]$$

補集合をとれば主張を得る．　□

定義 F.1 を §1.2 の記述と比較しながら簡単に説明しておく．

まず，σ 加法族という概念が新しいが，σ 加法族の条件は確率測度の定義域であるために当然成り立つべき条件である．§1.2 の k 歩の path の集合の上の一様分布 (Ω_k, P_k) では確率測度は Ω_k の任意の部分集合に対して定義されていて，それらを全て集めた集合族は σ 加法族になっている．§1.2 に比べて新しいのは，無限集合では確率 $\mathrm{P}[\, A \,]$ が任意の集合 $A \subset \Omega$ に対して定義できる保証がないので確率測度の定義域 $\mathcal{F}$ を明示しないといけない，という点である．測度を定義できない集合，すなわちどう値を決めても矛盾を起こす集合，があると覚悟する方がすなおである（考察の対象となる集合は通常すなおな，意味のあるものに限られているから，全ての集合に対して確率が決まる必要もない．だから全ての集合に対して確率が決められるかどうかに拘泥するのは得策でもない）．そこで，確率測度 P の定義域，すなわち，$\mathrm{P}[\, A \,]$ が定義されてい

る集合 $A \subset \Omega$ たちを集めた集合（集合の集合という意味で集合族と呼ぶ）を $\mathcal{F}$ と書いて，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の三つ組を明記して確率空間と呼ぶ．$\mathcal{F}$ の要素になっている集合，すなわち，確率が定義されている集合を測度論では可測集合と呼び，確率論では事象とも呼ぶ．§1 の有限長さの path の集合上の確率測度 P_k は Ω_k の任意の部分集合 A に対して $\mathrm{P}_k[\,A\,]$ が存在したため，$\mathcal{F}$ をわざわざ明記する必要がなかった（Ω_k の全ての部分集合を集めた集合族を 2^{Ω_k} と書くことにすれば，§1 で用意した確率空間 (Ω_k, P_k) は，書き方を統一するならば $(\Omega_k, 2^{\Omega_k}, \mathrm{P}_k)$ と書くことになる）．

以上は可測集合の族を用意することが必要な理由だが，ひとたび可測集合の族，すなわち，確率測度の定義域，を指定することが不可避と理解すれば，定義域をわざと制限することで新しい確率測度を得る，という方法で積極的に利用することができる．具体的には，§3.4.1 で path の k 歩目までで決まる集合を全て含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}_k = \sigma[W_0, W_1, \ldots, W_k]$ を導入した．このように，部分 σ 加法族はある時刻までに得られる情報という意味を持つ．

次に，確率測度の定義のうち規格化条件と非負性は §1.2 の有限集合の場合にも成り立つ当然の性質である．§1.2 と比べると，加法性 (1.3) が，可算個の集合の和に関しても成り立つという要請（σ 加法性）に変わった点が新しい．もちろん有限集合の場合は要素が有限個しかないので有限個の集合の和しか出てこないから σ 加法性は必要がない．それゆえ，§1.2 の $(\Omega_k, \mathrm{P}_k) = (\Omega_k, 2^{\Omega_k}, \mathrm{P}_k)$ は，この節での（無限集合の場合にも通用する）確率空間の定義に照らしても確率空間である．§1.2 ではそのことを承知で先取りして確率空間という用語を用いた．確率測度が σ 加法性を持つという要請は，特に非可算無限集合上の確率測度を考える場合にたいへん重要である．まず，有限加法性 (1.3) を満たすことを要請するのは測度が「量をはかる」ことである以上は当然だろう．問題は有限加法性を無限和まで拡張できるかということである．矛盾が起きないことは自明ではない．仮に際限なく和と期待値（積分）が交換できるとすると，たとえば §2.1 の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}_\infty)$ において任意の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して，(1.7) と (2.4) を用いて，

$$\mathrm{P}_\infty[\,A\,] \overset{(?)}{=} \sum_{w \in A} \mathrm{P}_\infty[\,\{w\}\,] = 0 \quad !? \tag{F.1}$$

などとなる．つまりあらゆる確率が 0 になって何も計算できなくなる．σ 加法性は，可算個（自然数で数えることができる無限，あるいは，数列として $a_1, a_2, \ldots$ と並べることができる無限個）の和と確率の交換までは矛盾なく要求できるという意味である（矛盾がないというのは，実際に意味のある測度の具体例があることによって分かる）．ちなみに，(F.1) から逆に，無限長 path は自然数で数えることができないことが分かる．このことを，無限長 path の集合は非可算であるという．

確率変数と期待値

§1.2 で確率空間上の関数のことを確率変数と呼ぶと言い，無限集合の場合には条件が付くことを予告した．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ が無限集合の場合も通用する定義で言う

と，確率変数とは，関数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ であって可測なもの，すなわち，

$$\{w \in \Omega \mid X(w) \geqq a\} \in \mathcal{F},\quad a \in \mathbb{R}, \tag{F.2}$$

が成り立つこと，を言う．とりうる値が $\mathbb{Z}$ ならば，可測性の定義 (F.2) は

$$\{w \in \Omega \mid X(w) = i\} \in \mathcal{F},\quad i \in \mathbb{Z}, \tag{F.3}$$

と同値であることは明らかである（この形のほうが §3.1 のネットワーク上の確率連鎖のように，一般の可算個の点に値をとる確率変数を考える場合に拡張しやすい）．可測な関数という意味で可測関数とも言う．可測という制限条件が加わるのは，$\{w \in \Omega \mid X(w) \geqq a\}$ という集合の確率，すなわち，事象 $X \geqq a$ が起きる確率，が定義できるためにはこの集合が確率測度の定義域 $\mathcal{F}$ に入っていなければいけないからである．すなわち，確率変数とは $\mathrm{P}[\,X \geqq a\,]$ が任意の a に対して存在する関数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ のことである．ここで，§1.2 と同様に，

$$\mathrm{P}[\,X \geqq a\,] = \mathrm{P}[\,\{w \in \Omega \mid X(w) \geqq a\}\,]$$

と書いた．以後このような略記法を積極的に用いることは §1.2 と同様である．なお，§1.2 では全ての部分集合が P_k の定義域に入ったので任意の関数が可測関数であった．

とりうる値が有限種類しかない可測関数を単関数または階段関数という．もっとも単純な単関数は $A \in \mathcal{F}$ の定義関数 χ_A（定義は (1.6)）である．単関数は，とりうる値が有限種類なので，それらを $c_1, c_2, \ldots, c_n$ とおき，値が c_i になる Ω の要素（$X(w) = c_i$ となる $w \in \Omega$）からなる集合を A_i と書くことで $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ という形に書ける．一方，非可算無限集合では (1.7) のような表記は（仮に書けても）役に立たない（(F.1) 参照）．

Path 集合 Ω 上の関数として基本的なのは，i 歩目の位置（変位）を表す関数 $W_i:\ \Omega \to \mathbb{Z}$ と i 歩目の動き（増分）を表す関数 $X_i:\ \Omega \to \{\pm 1\}$ である．それぞれ $w = (w(0), w(1), w(2), \ldots) \in \Omega$ に対して $W_i(w) = w(i)$, $X_i(w) = w(i) - w(i-1)$ で定義される．W_i, X_i は単関数であり（したがって，もちろん可測関数あるいは確率変数である），(1.8) を全ての $i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して満たす（W_i や X_i が有限個の可測集合の定義関数の線形結合として書けることは簡単だが，測度論に不案内な読者は試みてほしい練習問題である）．

集合の定義関数と単関数の定義は，考える集合を $\mathcal{F}$ の中から選ぶ必要があることを除けば §1.2 と同様である．複数の確率変数の線形結合も，確率変数の多項式（すなわち，X を確率変数，$f(x)$ を多項式とするとき $w \mapsto f(X(w))$ で定義される関数）も確率変数である．さらに確率変数列の各点収束極限も確率変数である（証明はルベーグ積分論の教科書（たとえば [T6, §10]）に譲る）．このように確率変数という概念は基礎的な演算に対して安定である．

確率測度 P に応じて，確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ に対して定積分（期待値）$\mathrm{E}[\,X\,]$ が定義できること，さらに，積分範囲が可測集合 $A \in \mathcal{F}$ のとき $\mathrm{E}[\,X; A\,]$ と書いて $\mathrm{E}[\,X; A\,] = \mathrm{E}[\,X\chi_A\,]$ で定義することも §1.2 と同様である．§1.2 で期待値について書いたこと，すなわち，

- 可測集合 $A \in \mathcal{F}$ の定義関数 χ_A に対してその確率を与えること，

$$\mathrm{E}[\ \chi_A\ ] = \mathrm{P}[\ A\ ],\quad A \in \mathcal{F}, \tag{F.4}$$

- 線形性，すなわち，確率変数 X, Y と定数 a, b に対して

$$\mathrm{E}[\ aX + bY\ ] = a\mathrm{E}[\ X\ ] + b\mathrm{E}[\ Y\ ], \tag{F.5}$$

は一般の場合も正しいが，さらに，一般の期待値を特徴づけるためにはもう一つの条件，すなわち，

- 非減少非負値確率変数列 $X_n:\ \Omega \to \mathbb{R}_+,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して期待値と極限の交換ができること，

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\ \lim_{n\to\infty} X_k\ ] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\ X_n\ ], \\ &X_n:\ \Omega \to \mathbb{R}\ \text{は可測で}\ 0 \leqq X_1(w) \leqq X_2(w) \leqq X_3(w) \leqq \cdots,\ w \in \Omega, \end{aligned} \tag{F.6}$$

も要請する．ここで，(F.6) において $\lim_{n\to\infty} X_n$ は各点収束極限で定義される関数，すなわち，

$$(\lim_{n\to\infty} X_n)(w) = \lim_{n\to\infty} X_n(w),\ w \in \Omega,$$

で定義される関数である（各点ごとに非減少列なので ∞ を許せば極限が必ず存在する）．$\mathcal{F}$ が σ 加法族であることから確率変数の各点収束極限は（値として $\pm\infty$ を許せば）確率変数になることが分かる．

(F.4), (F.5), (F.6) を全ての非負値確率変数に対して満たす非負値確率変数の集合から $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ への写像 $\mathrm{E}[\ \cdot\ ]$ を（非負値確率変数に対する）期待値と呼ぶ．

§1.2 では全ての関数が単関数だったので期待値は確率測度を用いて (1.10) によって具体的に書くことができた．一般の場合には単関数でない確率変数があるが，一般の非負値確率変数 X の期待値は，まず，X に単調増加して各点収束する非負値単関数列 $X_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$ をとれば，各 X_n に対する期待値 $\mathrm{E}[\ X_n\ ]$ は (1.10) によって与えられ，また $\mathrm{E}[\ X_n\ ]$ は n について非減少なので（∞ を許せば）極限が存在するので (F.6) によって $\mathrm{E}[\ X\ ] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\ X_n\ ]$ であることが分かる．この極限が単関数近似列 X_n のとりかたによらないことも定義から分かる．こうして，非負値確率変数に対する期待値は ∞ を許せば無条件で存在する．定義から，確率変数 X が非負値関数ならば，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{E}[\ X;\ A\ ] \geqq 0$ となる．この当たり前の事実は暗黙のうちにいろいろなところで用いられるが，不等式を用いて期待値を変形するときの基本である．

負の値もとる確率変数 X に対しては，正の部分と負の部分を分ける，すなわち，

$$X_+(w) = \max\{X(w), 0\},\ X_-(w) = \max\{-X(w), 0\},\quad w \in \Omega, \tag{F.7}$$

で定義される非負値確率変数 $X_\pm:\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ を考えて，$\mathrm{E}[\ X\ ] = \mathrm{E}[\ X_+\ ] - \mathrm{E}[\ X_-\ ]$ で期待値を定義する．ただし，$\mathrm{E}[\ X_+\ ] = \mathrm{E}[\ X_-\ ] = \infty$ のときは期待値は定義されない

ということにする．$X_\pm$ が可測であることは可測性の定義 (F.2) と X が可測であることから明らか．

(F.4)–(F.7) で確率変数（可測関数）の期待値（積分）の定義が完了した．要約すると，$\pm\infty$ を許せばたいていの可測関数について期待値は定義されるが，(F.7) で分かるように唯一の例外は確率変数の正の部分の期待値も負の部分の期待値も ∞ となる場合である．

期待値（積分）に関するもっともよく使われる基礎評価（チェビシェフ，シュワルツ，ヘルダーの不等式）については補題 1.7 に紹介した．

積分範囲が部分集合 $A \subset \Omega$ の場合の積分の定義は §1.2 と同様に

$$\mathrm{E}[\, X; A\,] = \mathrm{E}[\, X\,\chi_A\,]$$

である．A が可測集合 $(A \in \mathcal{F})$ の場合にのみ定義されることに注意．特に $\mathrm{E}[\,1;\ A\,] = \mathrm{E}[\,\chi_A\,] = \mathrm{P}[\,A\,]$．期待値に対して積分の記号を用いることがあるのも §1.2 の場合と同様で，そのとき，

$$\mathrm{E}[\, X; A\,] = \int_A X(w)\,\mathrm{P}[\,dw\,] = \int_A X\,d\mathrm{P}$$

など，いくつかの書き方があって，都合に応じて自由に使う．

確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}$ に関連する期待値で本書でよく用いるものに X の特性関数

$$\varphi_X(\xi) = \mathrm{E}[\, e^{\sqrt{-1}\xi X}\,]\ \ (\,= \mathrm{E}[\,\cos\xi X\,] + \sqrt{-1}\mathrm{E}[\,\sin\xi X\,]),\quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{F.8}$$

がある．特性関数はどんな確率変数に対しても存在する（全ての $\xi \in \mathbb{R}$ に対して発散せず，複素数値をとる)．

非負値確率変数 $X:\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ の場合には母関数

$$\varphi_X(\xi) = \mathrm{E}[\, e^{-\xi X}\,],\quad \xi \geqq 0, \tag{F.9}$$

も存在して，確率変数の漸近的性質を調べる上で重要である．このとき ξ は $\mathbf{Re}(\xi) \geqq 0$ を満たす複素数でも (F.9) が定義される（有限値をとる)（非負値でなくても (F.9) が有限値をとる ξ が存在すれば母関数は有効だが，本書で用いるのは非負値の場合である)．

その他の確率論の基礎用語や初等的定理のうちあとで頻繁に使うものも §F.3 に紹介しておく．

拡張定理

§2.1.1 の (2.3) で，k 歩目までで定まる $\mathbb{Z}$ 上の無限長 path の集合を全て集めた集合族（集合の集合）

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\pi_{\infty,k}^{-1}(A) \mid A \subset \Omega_k\} \tag{F.10}$$

を考えた．そして (2.2) を満たす確率測度が，$\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族の上で存在して一つに決まることを定理 2.2 で主張した．

与えられた集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族を本書では $\sigma[\mathcal{A}]$ と書くことにする．たとえば一つの集合 $A \subset \Omega$ を含む最小の σ 加法族は

$$\sigma[\{A\}] = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

の四つの集合からなる集合族である．$\mathcal{A}$ が有限集合族の時は横着して $\sigma[A]$ や $\sigma[A_1, \ldots, A_k]$ などとも書くことにする．

一般に，$\sigma[\mathcal{A}]$ は必ず存在する．実際，それは $\mathcal{A}$ を含む σ 加法族を全て考え，その全てに含まれる集合だけを集めて作った集合族で与えられる（定義からそれが σ 加法族になることも最小であることも直ちに分かる．また，全体集合 Ω の全ての部分集合を集めた集合族 2^Ω が σ 加法族なので，$\mathcal{A}$ を含む σ 加法族は存在する）．

有限歩で決まる path 集合たち (2.3) を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{A}]$ には有限歩では決まらない集合が含まれる．たとえば，$E \subset \Omega$ を，原点を出発する $\mathbb{Z}$ 上の無限長 path であって，-2 より先に 2 に到着するものを全て集めた集合とする．§3.4.1 で用意した到達時刻 τ_A を用いれば

$$E = \{w \in \Omega \mid \tau_2(w) < \tau_{-2}(w)\} \tag{F.11}$$

である．この集合はどんなに大きな k に対しても k 歩目まででは決まらない．k 歩目までずっと -1 と 1 の間を行ったり来たりする path は $k+1$ 歩目以降を見ないと E に入るか入らないか分からないからである．よって $E \notin \mathcal{A}$．他方，E に入っている path は全ていつか 2 というマス目に到達するから，2 に到達する時刻 k で分類することで，E は k 歩目までで決まる集合 $A_k \in \mathcal{A}$ を用いて $E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} A_k$ と書ける．これは $\mathcal{A}$ に含まれる集合の可算和だから $E \in \mathcal{F}$ である．

E は path が区間を脱出するときどちらの端から脱出するか，ということを見るのに必要な事象という意味で，その確率を測りたいというのは現実的な問題意識である．このような問題を扱うには $\mathcal{A}$ だけでは不十分で，σ 加法族 $\mathcal{F}$ を考えなければならない．

次に，定理 2.2 が主張する確率測度について説明するために (2.2) を書きなおしておく．$\mathcal{A}$ 上の集合関数 m： $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ を

$$m(\pi_{\infty,k}^{-1}(A)) = \mathrm{P}_k[\,A\,],\quad A \subset \Omega_k\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{F.12}$$

で定義する．このとき (2.2) は

$$\mathrm{P}_\infty[\,C\,] = m(C),\quad C \in \mathcal{A}, \tag{F.13}$$

と書けるので，定理 2.2 の主張は，「$\mathcal{A}$ 上で定義された集合関数 m を $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の確率測度に一意的に拡張できる，」と短く書くことができる．

有限歩で決まる集合からなる集合族 $\mathcal{A}$ は，(F.11) の例から分かるように σ 加法族ではない．これについて定義 F.1 の中で次のような「条件緩和」を考える．集合族

$\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ において，定義 F.1 の中の σ 加法族であることの条件の一つである「可算和について閉じていること」を，有限和について閉じていること

$$C_1, C_2 \in \mathcal{A} \ \text{ならば}\ C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A}$$

に置き換えたものが成り立っている集合族（つまり，全体集合を含み，補集合と有限和について閉じている集合族）を有限加法族と呼ぶ．そして，確率測度の定義において，σ 加法性の条件を，有限加法性，すなわち，§1.2 の (1.3) に置き換えた集合関数 $m: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$（つまり，有限加法族上で定義された非負値関数で有限加法性を持つもの）を有限加法的確率測度と呼ぶ（有限加法的測度と呼ぶときは規格化の条件は仮定しないが，以下では簡単のために全体集合の確率は 1 という規格化の条件もつけたままにして，仮に有限加法的確率測度と呼ぶことにする）．

Path 上の確率測度の問題に戻って，次のことに注意する．

命題 F.4　(F.10) の $\mathcal{A}$ は有限加法族であり，(F.12) の m は有限加法的確率測度である．◇

証明　定義から直接検証できるが簡単に説明しておく．

まず，全体集合 Ω は全部持って来るという意味で 0 歩で（したがって有限歩で）決まる集合だから $\Omega \in \mathcal{A}$. $C \in \Omega$ を，最初の k 歩で決まる無限長 path の集合とする．ある path が C に入るということが必ず k 歩目までに分かるのだから，ある（別の）path が C に入らないことも k 歩までに決まる．よって $C^c \in \mathcal{A}$. k 歩で決まる集合 C_1 と k' 歩で決まる集合 C_2（簡単のため $k' < k$ の場合を考える）に対してその和集合は k 歩まで見れば決まるから，有限歩で決まるので $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A}$ である．よって $\mathcal{A}$ は有限加法族である．

次に，m が非負であることと全確率が 1 になることは (F.12) で確率を使って定義していることから明らかである．最後に，$C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ がそれぞれ k, k' 歩で決まるとする（簡単のため $k' < k$ とする）．すなわち，

$$C_1 = \pi_{\infty,k}^{-1}(A_1), \quad C_2 = \pi_{\infty,k'}^{-1}(A_2),$$

を満たす $A_1 \subset \Omega_k$ と $A_2 \subset \Omega_{k'}$ があるとする．k' 歩で決まる集合は $k > k'$ なので k 歩で決まる．これを式で書くと整合条件（§2.1.1 の命題 2.1）の記号を用いて

$$C_2 = \pi_{\infty,k}^{-1}(\pi_{k,k'}^{-1}(A_2))$$

ということである．この記号を用いると

$$C_1 \cup C_2 = \pi_{\infty,k}^{-1}(A_1 \cup \pi_{k,k'}^{-1}(A_2))$$

となる．他方 (F.12) から

$$m(C_1) = \mathrm{P}_k[\,A_1\,], \quad m(C_2) = \mathrm{P}_{k'}[\,A_2\,],$$

だが，整合条件から

$$\mathrm{P}_{k'}[\,A_2\,] = \mathrm{P}_k[\,\pi_{k,k'}^{-1}(A_2)\,]$$

なので，P_k の持つ加法性から $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ならば

$$m(C_1 \cup C_2) = \mathrm{P}_k[\,A_1 \cup \pi_{k,k'}^{-1}(A_2)\,] = \mathrm{P}_k[\,A_1\,] + \mathrm{P}_k[\,\pi_{k,k'}^{-1}(A_2)\,] = m(C_1) + m(C_2)$$

となって，有限加法性が成り立つ．以上から m は有限加法的確率測度である．□

(2.2) のすぐ上の説明で，拡張定理（定理 2.2）が成り立つために整合条件が必要であることに言及したが，実際命題 F.4 の証明で見た通り，有限加法的測度 m の存在証明で用いる．ひとたび有限加法的測度が得られれば，測度への拡張，すなわち定理 2.2, は測度の定義だけから導かれる次の一般論によって（そこに仮定されている当然の追加条件だけで）自動的に可能になる．

定理 F.5　集合 Ω の部分集合からなる有限加法族 $\mathcal{A}$ を定義域とする有限加法的確率測度 m が，$\mathcal{A}$ 上で σ 加法性を持てば，m は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{A}]$ 上に一意的に拡張される．すなわち，$\mathcal{F}$ 上の確率測度 P が存在して，

$$\mathrm{P}[\,A\,] = m(A),\quad A \in \mathcal{A},$$

が成り立ち，かつ，このような関係を満たす $\mathcal{F}$ 上のどんな確率測度 P_∞ に対しても

$$\mathrm{P}[\,C\,] = \mathrm{P}_\infty[\,C\,],\quad C \in \mathcal{F},$$

が成り立つ．

ここで，有限加法族上の σ 加法性とは，$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, を満たすとき，$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は（$\mathcal{A}$ が σ 加法族ではないので，$A \in \mathcal{A}$ は一般には成り立たないが，もし）$A \in \mathcal{A}$ ならば $m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ が成り立つこと，を言う（確率空間の定義（定義 F.1）の σ 加法性との違いは確率空間では確率測度の定義域が σ 加法族なので，A は自動的に定義域に入るから，定義域の中のあらゆる（重ならない集合たちの）可算和に関して σ 加法性が要請されている点だけである）．◇

定理 F.5 は Carathéodory の拡張定理（確率測度の場合は E. Hopf の拡張定理）と呼ばれる．測度の定義から（外測度と可測集合という概念を経由することで）得られる，基本的な結果である．その証明はルベーグ積分の教科書（たとえば [T6, §4–§6 と定理 9.1, 定理 9.2]）を参照していただきたい．

定理 F.5 を用いて定理 2.2 を証明するのに測度の連続性（命題 F.2）の逆に対応する次の簡単な性質が有用である．

命題 F.6　定理 F.5 に書かれている仮定，すなわち，有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の σ 加法性を言うためには次の性質（測度の連続性）が言えれば十分である：$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ が減少列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ であって，全てに共通する要素がない $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset)$ ならば，$\lim_{i\to\infty} m(A_i) = 0$. ◇

証明　簡単なので（引用ですまさずに）証明しておく．

定理 F.5 の状況，すなわち，$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$, を満たすとして，$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおき，$A \in \mathcal{A}$ を仮定する．

$B_j = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right)^c$, $j \in \mathbb{N}$, とおくと $\mathcal{A}$ は有限加法族なので $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, である．また $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ である．$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ も容易に分かるので，命題の仮定から，

$$\lim_{j\to\infty} m(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right)^c) = \lim_{j\to\infty} m(B_j) = 0$$

を得るが，他方 m は有限加法的測度だから

$$\lim_{j\to\infty} (m(B_j) + \sum_{i=1}^{j} m(A_i)) = m(A),$$

なので，$m(A) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} m(A_i)$ を得て，m の $\mathcal{A}$ 上の σ 加法性が言える． □

以上の準備の下に定理 2.2 を証明する．

定理 2.2 の証明　命題 F.4 で注意した通り有限歩の path の確率空間 $(\Omega_k, 2^{\Omega_k}, \mathrm{P}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, を用いて (F.10) と (F.12) によって無限長 path の集合 Ω 上に定義された $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ は有限加法族上の有限加法的確率測度である．これを $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の確率測度に一意的に拡張できれば，定理 2.2 が言えたことになる．定理 F.5 と命題 F.6 から（命題 F.6 の対偶をとって），$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ を満たす $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, に対して $\alpha > 0$ がとれて，全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して $m(A_i) > \alpha$ を満たすときに，$\tilde{w} \in A_i$, $i \in \mathbb{N}$, なる path $\tilde{w} \in \Omega$ が存在することを言えばよい．

$k \in \mathbb{N}$ に対して最初の k 歩が $(w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \Omega_k$ である無限長 path の集合（筒集合と呼ぶことがある）を

$$\begin{aligned} C_{k,(w_1,\ldots,w_k)} &= \pi_{\infty,k}^{-1}((w_1, \ldots, w_k)) \\ &= \{w' \in \Omega \mid (W_1(w'), W_2(w'), \ldots, W_k(w')) = (w_1, \ldots, w_k)\} \end{aligned}$$

とおく．まず，$\tilde{w}$ の 1 歩目を決めるために，$i \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_{i,1}(\alpha) = \{(w_1) \in \Omega_1 \mid m(C_{1,(w_1)}) > 0,\ m(A_i \mid C_{1,(w_1)}) \geqq \frac{1}{2}\alpha\}$$

とおく．ここで

$$m(A \mid B) = \frac{m(A \cap B)}{m(B)}$$

は条件付き確率．すると，

$$\begin{aligned}\alpha \leqq m(A_i) &= \sum_{(w_1)\in\Omega_1} \mathrm{P}_1[\ \{w_1\}\ ]\, m(A_i \mid C_{1,(w_1)}) \\ &\leqq \mathrm{P}_1[\ I_{i,1}(\alpha)\ ] + \frac{\alpha}{2}\mathrm{P}_1[\ I_{i,1}(\alpha)^c\ ] \\ &\leqq \mathrm{P}_1[\ I_{i,1}(\alpha)\ ] + \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

だから

$$\mathrm{P}_1[\ I_{i,1}(\alpha)\ ] \geqq \frac{\alpha}{2},\quad i \in \mathbb{N}, \tag{F.14}$$

となる．$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ だから，$I_{1,1} \supset I_{2,1} \supset \cdots$ であるが，さらに，P_1 は 1 歩の path の集合 Ω_1 上の確率測度だから，命題 F.2 から $(\tilde{w}_1) \in \Omega_1$ が存在して

$$\tilde{w}_1 \in I_{i,1}(\alpha),\quad i \in \mathbb{N},$$

が成り立つ．

$\tilde{w}$ の 2 歩目以降を定めるのに $I_{i,1}$ を一般化して

$$I_{i,k}(\alpha) = \{(w_1,\ldots,w_k) \in \Omega_k \mid m(C_{k,(w_1,\ldots,w_k)}) > 0,\ m(A_i \mid C_{k,(w_1,\ldots,w_k)}) \geqq 2^{-k}\alpha\},\quad i,k \in \mathbb{N}, \tag{F.15}$$

とおく．

$\tilde{w}_1$ を上で定めたものに固定して 2 歩目について同様に考えると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha \leqq m(A_i \mid C_{1,(\tilde{w}_1)}) &= \sum_{\substack{(w_1,w_2)\in\Omega_2;\\ w_1=\tilde{w}_1}} \frac{\mathrm{P}_2[\ \{(\tilde{w}_1,w_2)\}\ ]}{\mathrm{P}_1[\ \{(\tilde{w}_1)\}\ ]} m(A_i \mid C_{2,(\tilde{w}_1,w_2)}) \\ &= \sum_{\substack{(w_1,w_2)\in I_{i2}(\alpha);\\ w_1=\tilde{w}_1}} \frac{\mathrm{P}_2[\ \{(\tilde{w}_1,w_2)\}\ ]}{\mathrm{P}_1[\ \{(\tilde{w}_1)\}\ ]} m(A_i \mid C_{2,(\tilde{w}_1,w_2)}) \\ &\quad + \sum_{\substack{(w_1,w_2)\in I_{i2}(\alpha)^c;\\ w_1=\tilde{w}_1}} \frac{\mathrm{P}_2[\ \{(\tilde{w}_1,w_2)\}\ ]}{\mathrm{P}_1[\ \{(\tilde{w}_1)\}\ ]} m(A_i \mid C_{2,(\tilde{w}_1,w_2)}) \\ &\leqq \mathrm{P}_2[\ I_{i2}(\alpha) \mid W_1 = \tilde{w}_1\ ] + \frac{1}{4}\alpha\,\mathrm{P}_2[\ I_{i2}(\alpha)^c \mid W_1 = \tilde{w}_1\ ] \\ &\leqq \mathrm{P}_2[\ I_{i2}(\alpha) \mid W_1 = \tilde{w}_1\ ] + \frac{1}{4}\alpha\end{aligned}$$

となるので

$$\mathrm{P}_2[\, I_{i2}(\alpha) \mid W_1 = \tilde{w}_1 \,] \geqq 2^{-2}\alpha > 0$$

を得る．あとは (F.14) 以下と同様の議論で命題 F.2 から $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in \Omega_2$ が存在して

$$(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in I_{i,2}(\alpha), \quad i \in \mathbb{N},$$

が成り立つ．

以上の議論を帰納的に繰り返すと $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\mathrm{P}_k[\, I_{ik}(\alpha) \mid (W_1, \ldots, W_{k-1}) = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{k-1}) \,] \geqq 2^{-k}\alpha > 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

となる $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \ldots) \in \Omega$ が存在する．$I_{ik}(\alpha)$ の定義 (F.15) からこのとき $\tilde{w} \in A_i$, $i \in \mathbb{N}$, が成り立つ．

これはこの証明の冒頭で目標とした $\tilde{w}$ に他ならない． □

§2.1.1 では $\mathbb{Z}$ 上の歩数を固定した path の上の一様分布を考えた．この節 §F.1 ではそれに即して，無限長 path の集合の上の確率測度への拡張について説明したが，path の性質を用いたのは整合条件（命題 2.1）と定理 2.2 の証明（有限加法的測度の有限加法族上の σ 加法性）においてだけである．実際，(path 上の確率測度の列に限らず) 一般の確率空間の列に対しても整合条件と有限加法族上の σ 加法性が満たされれば，それらと整合する「親玉」の確率空間の存在が証明できる．これを Kolmogorov の拡張定理と呼ぶ．詳しくは本格的な基礎教科書（たとえば [T3]）を参照していただきたい．

分布

実数上の確率測度（すなわち $\Omega = \mathbb{R}$ の場合）を分布と呼ぶことが多い．詳しく言うと，実数上のボレル確率測度のことを分布と呼ぶ．ボレル確率測度とは，Ω が位相空間（開集合が定義されている集合）の場合に，開集合が全て定義域 $\mathcal{F}$ に含まれる確率測度を指す．開集合を全て含む最小の σ 加法族のことをボレル σ 加法族ともいい，$\mathbb{R}^n$ のボレル σ 加法族を $\mathcal{B}_n$ などと書くこともある．$\Omega = \mathbb{R}$ の開集合は全て高々可算個の区間の和集合で書けることが知られているので，$\mathcal{B}_1$ 上の確率測度（分布）は，区間に対して確率が定義されている確率測度のことといってもよい．一般に $\mathcal{B}_n$ についても同様である．

もっとも単純な分布は，$x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mu_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

で決まる分布である．x だけが確率 1 で出現する（他の値は確率 0，すなわち，現れない）という意味で，x に集中した単位分布などと呼ぶ．

単位分布を極端な例として，一般的に，実数上の確率測度といっても実質その真部分集合にしか確率が正でない場合もある．本書の第 II 部で多く用いるのは

$\mathrm{P}[\,(-\infty,0)\,]=0$，すなわち，負の実数は確率 0 となる場合である．一般に，ある集合 $A\subset\Omega$ に対して $\mathrm{P}[\,A^c\,]=0$ となるとき，確率測度 P の台は A に含まれる，という．

実数上の分布でもっともよく登場するのは一様分布であろう．たとえば区間 $[0,1]$ 上の一様分布とは，区間 $[a,b]\subset[0,1]$ に対してその長さ $\mu([a,b])=b-a$ を与えるボレル確率測度のことを言う．一様分布が存在することは拡張定理（定理 F.5）によって証明できる．

確率測度の定義（定義 F.1）において規格化の条件を要求しないものが測度の定義であるが，全体集合を有界区間 $[0,1]$ に限らないで $\mathbb{R}$ の全ての区間 $[a,b]$ に対してその長さ $\mu([a,b])=b-a$ を与える測度が存在することも定理 F.5 によって証明できる．さらに，少し細かいことだが，測度 0 の集合の部分集合を全て定義域に矛盾なく追加することが可能である（測度の完備化と呼ばれる）．μ を完備化したものを 1 次元ルベーグ測度と呼ぶ．一般に，$\mathbb{R}^n$ の n 次元直方体に対して普通の意味での n 次元体積を与えるボレル測度を完備化したものを n 次元ルベーグ測度と呼ぶ．n 次元ルベーグ測度 μ_n に関する積分（§F.1 で与えた確率測度に関する期待値の定義と同じ）は $\mathbb{R}^n$ 上の（狭義の）リーマン積分の拡張になっている（リーマン積分可能な関数に対しては同じ値を与える）ことが知られている．通常 μ_n に関する積分 $\displaystyle\int f\,d\mu_n$ を $\displaystyle\int f(x)\,d^dx$ などと書く．

μ_1 を 1 次元ルベーグ測度，$\rho\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ を非負値のルベーグ可測関数とするとき，ルベーグ可測集合 A に対して，A で ρ を積分した値を対応させることで得られる集合関数

$$A\mapsto\nu(A)=\int_A\rho(x)\,dx$$

が測度になることは容易に分かる．特に，積分の定義から

$$\mu_1(A)=0\ \Rightarrow\ \nu(A)=0,\quad A\in\mathcal{B}_1\,, \tag{F.16}$$

が成り立つ．逆に，ある測度 ν に対して (F.16) が成り立つとき ν は μ_1 に対して絶対連続であると言う．絶対連続な測度は密度関数を持つことが知られている．すなわち，ある非負値 μ_1–可測関数 ρ が存在して，

$$\nu(A)=\int_A\rho(x)\,dx,\quad A\in\mathcal{B}_1\,,$$

が成り立つ．

完備化の説明で，確率が 0 になる集合が出てきた．確率が 0 になる集合を零集合ということがある．空集合の確率は 0 だが，零集合であっても空集合とは言えない．たとえば $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークに対する大数の法則（命題 2.5）で $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k(w)=0$ が全ての無限長 path $w\in\Omega$ に対して成り立つわけではない．$w=(0,1,2,3,\dots)\in\Omega$ に対しては $\frac{1}{k}W_k(w)=1$ が全ての k に対して成り立つので，極限でも 0 ではない．そのような，いとも簡単に作れる例外があるにも関わらず，「典型的な」path に対しては必ず $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k(w)=0$ が成り立つ，つまり，$\{w\in\Omega\mid\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k(w)=0\}$ という集

合の補集合が零集合である，というのが命題 2.5 の主張である．このとき

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k=0,\quad a.e.,$$

あるいは

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k=0,\quad \mathrm{P}-a.e.,$$

などと書いて，「ほとんどいたるところ $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k=0$ である」あるいは「ほとんど全ての $w\in\Omega$ に対して $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}W_k(w)=0$ である」などと言う．a.e. は almost everywhere の略，すなわち，問題になっている事象が成り立つ確率が 1 である（成り立たない確率が 0 である）ことを表す（確率論では a.s. (almost surely) と書くほうが普通かもしれない）．

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ とその上の確率変数 $X:\ \Omega\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，元の空間の確率測度 P を関数 X で $\mathbb{R}$ 上の確率測度，すなわち分布，に「写す」ことができる．すなわち，実数の（ボレル可測）集合 $A\in\mathcal{B}_1$ に対して

$$\mathrm{P}\circ X^{-1}(A)=\mathrm{P}[\ \{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in A\}\ ]$$

とおくことで実数上の（ボレル）確率測度 $\mathrm{P}\circ X^{-1}$ を定義して，X の分布と呼ぶ（少し分かりにくい記号かもしれないが，関数 X とその値域の中の集合に対して A の X による逆像をしばしば

$$\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in A\}=X^{-1}(A)$$

と書くことから

$$\mathrm{P}\circ X^{-1}(A)=\mathrm{P}[\ X^{-1}(A)\ ]$$

という意味でこの書き方をする）．

ボレル測度，測度の完備化，絶対連続，密度関数については，本書では第 II 部の一部を除いて精密な性質を必要としないので，これ以上詳しいことには立ち入らない．ルベーグ積分論の基礎教科書，たとえば [T6] を参照していただきたい．

F.2　条件付き確率，独立性

条件付き確率

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ において，二つの事象 $A,B\in\mathcal{F}$ に対して，B が成り立つ条件下での A の（条件付き）確率を

$$\mathrm{P}[\ A\mid B\ ]=\frac{\mathrm{P}[\ A\cap B\ ]}{\mathrm{P}[\ B\ ]}$$

と書くことはよく知られているだろう（本書では集合の指定も $\{w \in \Omega \mid \cdots\}$ のように縦線を用いるので集合の確率を表す $\mathrm{P}[\,\{w \in \Omega \mid \cdots\}\,]$ と条件付き確率の記号に注意していただきたい．構文上紛れることはないはずである）．

$$\mathrm{P}[\,A \mid B\,] = \mathrm{P}[\,A\,] \tag{F.17}$$

が成り立つとき，A と B は独立である，ということも既知であろう．細かく言うと，以上は $\mathrm{P}[\,B\,] > 0$ でなければ意味を持たないが，独立性に関しては (F.17) の両辺に $\mathrm{P}[\,B\,]$ をかけて，

$$\mathrm{P}[\,A \cap B\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B\,] \tag{F.18}$$

を定義とする（つまり $\mathrm{P}[\,B\,] = 0$ の場合も A と B は独立，と言うことにする）．このとき，(F.18) の両辺を $\mathrm{P}[\,A\,]$ からひけば

$$\mathrm{P}[\,A \cap B^c\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\mathrm{P}[\,B^c\,] \tag{F.19}$$

を得る．他方，B を含む最小の σ 加法族は

$$\sigma[\{B\}] = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$$

だから独立性の古典的な定義 (F.17) は A が $\sigma[\{B\}]$ の全ての集合と独立であることと同値になる．このように，特定の事象に対する条件付確率だけでなく，（特に，独立性との関係で）σ 加法族に属するいろいろな集合に対する条件付確率に興味が生じることがある．まとめて書くには関数にすればよい．こうして条件付き確率は Ω 上の関数（$\xi \in \Omega$ を与えるごとに Ω 上の確率測度が決まる，という意味の関数）として拡張される．σ 加法族 $\sigma[\{B\}]$ に対しては，

$$\mathrm{P}[\,\cdot \mid \sigma[\{B\}]\,](\xi) = \begin{cases} \mathrm{P}[\,\cdot \mid B\,], & \xi \in B, \\ \mathrm{P}[\,\cdot \mid B^c\,], & \xi \in B^c, \end{cases} \tag{F.20}$$

で定義される，確率測度を値とする関数 $\mathrm{P}[\,\cdot \mid \sigma[\{B\}]\,]$ を条件付き確率と呼ぶ（$\cdot$ と書いたのは，関数の値が確率測度，すなわち集合関数，で，集合関数としての変数が $\cdot$ の位置に入る，という意味）．

σ 加法族が $\sigma[\{B\}]$ のように（B と B^c という）「最小単位」を持つ場合は，確率測度に値をとる関数といっても可能な値は $\mathrm{P}[\,\cdot \mid B\,]$ と $\mathrm{P}[\,\cdot \mid B^c\,]$ の 2 種類しかないので，わざわざ確率測度に値をとる関数という表現を用いる理由は分かりにくいが，ボレル σ 加法族のように複雑な σ 加法族では (F.20) のように直接的に書くことができないので，関数の形に表現することが意味を持つ．

定義 F.7 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族 $\mathcal{B}$ が与えられたとき，$\mathcal{B}$ に関する条件付き確率 $\mathrm{P}[\,\cdot \mid \mathcal{B}\,]$ とは，以下を満たすものである．

- ほとんど全ての $\xi \in \Omega$ に対して $\mathrm{P}[\,\cdot \mid \mathcal{B}\,](\xi)$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度である．

- 各 $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{P}[\,A \mid \mathcal{B}\,]:\ \Omega \to [0,1]$ は $\mathcal{B}$–可測関数で
$$\mathrm{P}[\,A\,] = \mathrm{E}[\,\mathrm{P}[\,A \mid \mathcal{B}\,]\,] \tag{F.21}$$
を満たす（詳しく言うと，定義の第 1 項から $\mathrm{P}[\,A \mid \mathcal{B}\,](\xi)$ はほとんど全ての $\xi \in \Omega$ に対してのみ定義されているが，確率 0 の場所は最初から除いて期待値を定義する，という意味である）． ◇

$\mathcal{B} = \sigma[\{B\}]$ の場合に (F.20) が定義 F.7 を満たしていることは直接確かめられる．(F.21) については

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\,\mathrm{P}[\,A \mid \mathcal{B}\,]\,] &= \mathrm{P}[\,B\,]\mathrm{P}[\,A \mid B\,] + \mathrm{P}[\,B^c\,]\mathrm{P}[\,A \mid B^c\,] \\ &= \mathrm{P}[\,A \cap B\,] + \mathrm{P}[\,A \cap B^c\,] = \mathrm{P}[\,A\,]\end{aligned}$$

から成り立つことが分かる．

一般の場合に定義 F.7 を満たす量が存在することは直感的にも分かりやすいとは言えない．条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,\cdot \mid \mathcal{B}\,]$ のほうが少し分かりやすいかもしれない．

定義 F.8　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{F}$–可測関数 $f:\ \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき，f の $\mathcal{B}$ に関する条件付き期待値 $\mathrm{E}[\,f \mid \mathcal{B}\,]$ とは，$\mathcal{B}$–可測関数であって

$$\mathrm{E}[\,f\,] = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}[\,f \mid \mathcal{B}\,]\,]$$

を満たすものである． ◇

$\mathcal{B} = \sigma[\{B\}]$ の場合は

$$\mathrm{E}[\,f \mid \mathcal{B}\,](\xi) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{E}[\,f;B\,]}{\mathrm{P}[\,B\,]} = \dfrac{\int_B f d\mathrm{P}}{\int_B d\mathrm{P}}, & \xi \in B, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{E}[\,f;B^c\,]}{\mathrm{P}[\,B^c\,]} = \dfrac{\int_{B^c} f d\mathrm{P}}{\int_{B^c} d\mathrm{P}}, & \xi \in B^c, \end{cases}$$

である．これが定義 F.8 を満たすことは容易に分かる．この具体例から，条件付き期待値は，元の関数を $\mathcal{B}$–可測になるようにならしたものである，ということが分かるだろう．この観点からは，いわゆる期待値は $\mathcal{B}$ として $\{\emptyset, \Omega\}$ をとった場合，すなわち，元の関数を Ω 全体でならしたものである，という言い方もできる．

条件付き期待値と条件付き確率との関係は，

$$\mathrm{P}[\,A \mid \mathcal{B}\,](\xi) = \mathrm{E}[\,\chi_A \mid \mathcal{B}\,](\xi),\quad \xi \in \Omega,\ A \in \mathcal{F},$$

によって与えられる．この関係式からたとえば (F.21) が成り立つことは容易に分かる．

条件付き確率や条件付き期待値の一般論は測度論に対するある程度の慣れを要するので，ルベーグ積分論または確率論のある程度しっかりした基礎教科書，たとえば [T2, T6] などを参照していただきたい．本書では離散的な path しか扱わないので，条件付き確率の記号を直感的な意味にとらえても大きく誤解することは少ないと期待する．

ボレル・カンテリの定理

ボレル・カンテリの定理 (Borel–Cantelli) はよく知られた基礎事項であるが，重複対数の法則の証明 (§2.3, §5.4) で用いるのでここに紹介しておく．証明は教科書，たとえば [T1, 補題 1.3.3]，にゆずる．第 1 定理は無条件に成り立つが，第 2 定理は事象の独立性が仮定に含まれることを特に強調しておく．§5.4.2 では通常の教科書にない拡張形を用いるのでそれも紹介する．

定理 F.9 (ボレル・カンテリ第 1 定理) 事象列 $\{A_k\}$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k\ ] < \infty$ ならば $\mathrm{P}[\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\ ] = 0$, すなわち，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対して，ある $k_0(\omega)$ 以降の k について $\omega \notin A_k$ (すなわち，ほとんど全ての ω はそれぞれ有限個の A_k にしか含まれていない)． ◇

定理 F.10 (ボレル・カンテリ第 2 定理) 独立な事象列 $\{A_k\}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k\ ] = \infty$$

ならば $\mathrm{P}[\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\ ] = 1$, すなわち，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ はそれぞれ無限個の A_k に含まれている． ◇

定理 F.10 は独立事象列という強い仮定をおいている．この定理の結論はマルコフ性という，独立性よりも若干弱い仮定の下でも成り立つことを注意しておく．

定理 F.11 (ボレル・カンテリ第 2 定理の拡張) 事象列 $\{A_k\}$ が，次のいずれか少なくとも一方を満たすとする：

(i) $\mathrm{P}[\ A_n \mid \sigma[A_{n+1}, \ldots, A_N]\ ] = \mathrm{P}[\ A_n \mid \sigma[A_{n+1}]\ ]$, $N > n$, と

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_k \cap {A_{k+1}}^c\ ] = \infty, \tag{F.22}$$

または，

(ii) $\mathrm{P}[\ A_N \mid \sigma[A_{N-1}, \ldots, A_n]\ ] = \mathrm{P}[\ A_N \mid \sigma[A_{N-1}]\ ]$, $N > n$, と

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\ A_{k+1} \cap {A_k}^c\ ] = \infty.$$

このとき，$\mathrm{P}[\,\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,] = 1$，すなわち，ほとんど全ての $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in A_k$ が無限個の k に対して成り立つ．◇

証明　最初の選択肢の場合を証明する．後の選択肢は添字の順序を入れ替えれば同様に証明できる．

まず，(F.22) から

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_k \mid {A_{k+1}}^c\,] = \infty \tag{F.23}$$

を導く．実際，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_k \mid {A_{k+1}}^c\,] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{P}[\,A_k \cap {A_{k+1}}^c\,]}{\mathrm{P}[\,A_{k+1}\,]^c} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,A_k \cap {A_{k+1}}^c\,] = \infty.$$

よって (F.23) が示された．

次に，マルコフ性の仮定から $n < N$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)^c\right] &= \mathrm{P}[\,{A_n}^c \mid \bigcap_{k=n+1}^{N} {A_k}^c\,] \cdot \mathrm{P}[\,{A_{n+1}}^c \mid \bigcap_{k=n+2}^{N} {A_k}^c\,] \\
&\quad \times \cdots \times \mathrm{P}[\,{A_{N-2}}^c \mid \bigcap_{k=N-1}^{N} {A_k}^c\,] \cdot \mathrm{P}[\,{A_{N-1}}^c \mid {A_N}^c\,] \cdot \mathrm{P}[\,{A_N}^c\,] \\
&= \mathrm{P}[\,{A_N}^c\,] \cdot \prod_{k=n}^{N-1} \mathrm{P}[\,{A_k}^c \mid {A_{k+1}}^c\,] \\
&= \mathrm{P}[\,{A_N}^c\,] \cdot \prod_{k=n}^{N-1} (1 - \mathrm{P}[\,A_k \mid {A_{k+1}}^c\,]) \\
&\leqq \exp(-\sum_{k=n}^{N-1} \mathrm{P}[\,A_k \mid {A_{k+1}}^c\,]) \;\to\; 0, \quad N \to \infty.
\end{aligned}$$

最右辺は (F.23) による．

これから，

$$\mathrm{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right] = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\left(1 - \mathrm{P}\left[\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)^c\right]\right) = 1\,.$$

□

確率変数列の独立性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ の上の有限個の実数値確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ が独立であるとは

$$\mathrm{P}[\, X_1 \geqq a_1, X_2 \geqq a_2, \ldots, X_k \geqq a_k \,] = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{P}[\, X_i \geqq a_i \,], \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k, \tag{F.24}$$

が成り立つことを言う．無限個の確率変数が独立とは，その中のどの有限個も独立であることを言う．本書では以上の素朴な定義だけで十分なので，詳しいことは省略する．

F.3　確率変数列の極限

極限と期待値の順序交換

収束する確率変数列の期待値の収束（積分と極限の交換）に関する十分条件を与える代表的な公式として，単調収束定理と優収束定理がある．単調収束定理は全ての基本であり，(F.6) ですでに紹介した．そこでは，(F.6) が満たされるように期待値を定義すべきである，という言い方で紹介したが，§F.1 の (F.4) から (F.7) までによる期待値の定義の下で実際に単調収束定理が成り立つ．

定理 F.12 (単調収束定理)　各点で単調に増加（非減少）する非負確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, X_n \,] = \mathrm{E}[\, \lim_{n\to\infty} X_n \,]$$

が成り立つ．

ここで等号の意味は一方が収束すればもう一方の辺も収束して極限が等しいという通常の意味の他に，一方が（正の無限大に）発散すればもう一方も発散する，という意味もこめて成り立つ．◇

Fatou の補題は収束していない可測関数列（確率変数列）の積分と下極限の交換に用いることができるので，頻繁に用いられる．

定理 F.13 (Fatou の補題)　非負 $(X_n \geqq 0)$ 確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して，

$$\mathrm{E}[\, \varliminf_{n\to\infty} X_n \,] \leqq \varliminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, X_n \,].$$

◇

定理 F.14 (優収束定理)　各点収束する確率変数列 X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ に対して，$\mathrm{E}[\, Y \,] < \infty$ なる非負値確率変数 $Y:\ \Omega \to \mathbb{R}_+$ が存在して $|X_n(w)| \leqq Y(w)$, $w \in \Omega$, が成り立つならば，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\, X_n \,] = \mathrm{E}[\, \lim_{n\to\infty} X_n \,]$$

が成り立つ．◇

本書でも随所で用いる基本公式であるが，いずれの定理も期待値の定義に戻れば難しくはないので，証明はルベーグ積分の基礎教科書（たとえば [T6]）に譲る．

確率変数の収束

確率変数列の収束（関数の集合の中での「近づく」という概念）は有用なものが複数ある．期待値の列は実数（1 次元実空間）の数列なのと比べると，関数の列は無限次元実空間の点列なので，何をもって「近づく」と判断するかは，考える問題によって異なるからである．たいがいの確率論の基礎教科書に紹介されるものは，概収束，L^p 収束，確率収束，法則収束，である．ここでは第 I 部に必要な最小限として，概収束と法則収束に絞って復習する．

$\mathbb{R}$ 上の確率測度の列 μ_k, $k=1,2,3,\ldots$, が $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ に弱収束するとは，$\mathbb{R}$ 上の任意の有界な連続関数 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu_k(dx)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mu(dx) \tag{F.25}$$

となることを言うのであった（たとえば [T1, 定義 1.4.1]）．これを確率変数列の言葉で書いたものを法則収束という．すなわち，確率変数の列 X_k, $k=1,2,3,\ldots$, が確率変数 Z に法則収束するとは X_k の分布が X の分布に $k\to\infty$ のとき弱収束することを言う．

細かい注意だが，確率変数の分布は，確率変数の値域の上の確率測度だから，弱収束は個々の X_k がどこの空間の上の関数であるかは問わない．各 k ごとに異なる確率空間 $(\Omega_k,\mathcal{F}_k,\mathrm{P}_k)$ があって，$X_k:\ \Omega_k\to\mathbb{R}$ が Ω_k 上の確率変数のとき，X_k の分布 $\mu_k=\mathrm{P}_k\circ X_k^{-1}$ は $\mathbb{R}$ 上のボレル測度になる．これがある確率測度 μ に対して (F.25) を満たすとき，X_k は μ を分布に持つ確率変数に弱収束する．異なる世界の上の確率変数たちを並べておいてどこかに近づくかどうか（収束）を論じるのは奇妙に見えるかもしれないが，元の確率変数列の分布を考えるのに，同じ分布を持つより簡単な分布の列に問題を翻訳してから収束を議論することで見通しを良くする，という積極的な利用を意図していると思えばよい．

分布列の法則収束や確率変数列の弱収束は任意の有界な連続関数 f に対して (F.25) が成り立つことが定義だが，関数 f として特別の一群に対して (F.25) が成り立てば法則収束することが分かっている．特に重要なのが三角関数の族 $f(x)=e^{\sqrt{-1}\xi x}$, $\xi\in\mathbb{R}$, である（本書では主に実数値関数で話を進めているので，虚数を含む等式は $e^{\sqrt{-1}\xi x}=\cos\xi x+\sqrt{-1}\sin\xi x$ などと虚部と実部に分けてそれぞれについての二つの式を合わせて書いた省略形と理解してもほぼ読み進めることができる．ただし，補遺の他の節では複素関数論の知識を用いる）．

確率測度 μ に対して $\varphi_\mu(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x}\,\mu(dx)$, $\xi\in\mathbb{R}$, で定義される ξ に関する複素数値関数 $\varphi_\mu(\xi)$ を μ の特性関数と言う．また，確率変数 X の分布の特性関数を X の特性関数とも言う．

$$\varphi_X(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\xi x}\mathrm{P}\circ X^{-1}(dx)=\int_{\Omega} e^{\sqrt{-1}\xi X(w)}\mathrm{P}[\,dw\,]=\mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}\xi X}\,]$$

より (F.8)

$$\varphi_X(\xi)=\mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}\xi X}\,]$$

を得る．

特性関数は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であり，原点で $\varphi_X(0) = \mathrm{E}[\,1\,] = 1$ になる．さらに，特性関数は対応する確率測度や確率変数を Lévy の反転公式

$$\mu([a,b]) = \frac{1}{2}\left(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})\right) + \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-\sqrt{-1}\xi a} - e^{-\sqrt{-1}\xi b}}{t\sqrt{-1}}\,\varphi_\mu(\xi)\,d\xi, \quad a \leqq b, \qquad \text{(F.26)}$$

によって再現できる．

次の Lévy の連続性定理は特性関数と弱収束の関係を与える．

定理 F.15 (Lévy)　$k = 1, 2, 3, \dots$ に対して，確率測度 μ_k の特性関数を φ_{μ_k} とする．$\lim_{k\to\infty}\varphi_{\mu_k}$ が各点収束して極限関数 φ が原点で連続ならば，μ_k は $k\to\infty$ である確率測度 μ に弱収束し，φ は μ の特性関数になっている．　◇

Lévy の反転公式と Lévy の連続性定理の証明は確率論の教科書，たとえば [T1, 定理 1.4.10 と定理 1.4.14] を参照していただきたい．

中心極限定理は法則収束を用いて書かれた有名な基礎定理である．

定理 F.16 (中心極限定理)　期待値 $m = \mathrm{E}[\,X_1\,]$ と分散 $v = \mathrm{E}[\,(X_1 - m)^2\,]$ が有限（すなわち 2 次モーメント $\mathrm{E}[\,X_1^2\,]$ が有限）な独立同分布確率変数列 X_i, $i = 1, 2, 3, \dots,$ に対して $\dfrac{1}{\sqrt{k\,v}}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(X_i - m)$ の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に弱収束する．ここで，標準正規分布とは密度関数が $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ で与えられる $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度である．◇

証明は特性関数の収束を示して定理 F.15 を用いればよい．

最後に，定理 F.16 の標準的な証明のまねをして §1.4 の命題 1.5 の証明を与えておく．

細かい注意だが，定理 F.16 をそのまま当てはめて命題 1.5 の証明とすることはできない．W_k は確率変数の和 $W_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ の形に書けているが，X_i たちが独立同分布であることは §1.4 では明示していないし，何よりも，定理 F.16 は無限個の確率変数 X_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ を同時に一つの確率空間の中で考えているので，定理 F.16 を直接適用するためには，無限の長さの path の集合上の確率測度を考えなければならないのに対して，§1.4 を含む §1 では各 k ごとに k 歩の path の集合の上の確率測度を考えているからである（もちろん，§2 に説明した通りこの問題は乗り越えられるので，命題 1.5 の実質的な内容は中心極限定理である）．

命題 1.5 の証明　$\dfrac{1}{\sqrt{k}}W_k$ の特性関数 $\varphi_k(\xi) = \mathrm{E}[\,e^{\sqrt{-1}\xi W_k/\sqrt{k}}\,]$ を定理 1.1 を繰り返し用いて変形する．

$$\begin{aligned}\varphi_k(\xi) &= \mathrm{E}[\ \prod_{i=1}^{k} e^{\sqrt{-1}\xi X_i/\sqrt{k}}\ ] \\ &= \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}[\ e^{\sqrt{-1}\xi X_i/\sqrt{k}}\ ] \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\xi/\sqrt{k}} + e^{-\sqrt{-1}\xi/\sqrt{k}}\right) \\ &= \left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)^k, \quad \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

テーラーの定理を用いると

$$\log\varphi_k(\xi) = -\frac{1}{2}\xi^2 \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\xi\theta(\xi,k)}{\sqrt{k}}\right)}$$

なる $\theta(\xi,k)$ が区間 $(0,1)$ の中に存在する．よって，

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

右辺は連続関数（$N(0,1)$ の特性関数）だから，Lévy の連続性定理（定理 F.15）から $\dfrac{1}{\sqrt{k}}W_k$ は $k\to\infty$ で $N(0,1)$ に法則収束する．□

弱収束は分布の収束だが，これに対して，確率変数列 X_k, $k\in\mathbb{N}$, が確率 0 を除いて「事実上」定義域全体で収束する（すなわち，関数列として確率の意味での例外点を除いて各点収束する）ことを概収束と言う．概収束の十分条件として有名なものに，分散有限な独立同分布確率変数列の和に対して成り立つ大数の強法則がある．

定理 F.17 (大数の強法則)　X_k, $k\in\mathbb{N}$, が独立同分布確率変数列で $\mathrm{E}[\ |X_1|\ ] < \infty$ ならば，その和の列 $W_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, $k\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}W_k = \mathrm{E}[\ X_1\ ]$, a.e., が成り立つ．◇

この有名な定理の証明は長くなるので確率論の教科書，たとえば [T2, 六章，定理 4] に譲る．仮定を強くした（適用範囲を制限した）次の定理の証明のみ概略を復習しておく（詳しくは，たとえば [T1, 定理 1.3.5] を参照）．

定理 F.18　X_k, $k\in\mathbb{N}$, が独立同分布確率変数列で $\mathrm{E}[\ X_1^4\ ] < \infty$ ならば，その和の列 $W_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, $k\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}W_k = \mathrm{E}[\ X_1\ ]$, a.e., が成り立つ．◇

証明　X_k の代わりに $X_k - \mathrm{E}[\,X_1\,]$ を考えることで，最初から $\mathrm{E}[\,X_1\,] = 0$ としてよい．以下その場合のみ考える．

$\epsilon > 0$ を任意に固定し，$\mathrm{P}[\,|W_k| \geqq \epsilon k\,]$ に対してチェビシェフの不等式（補題 1.7）を用いて $\mathrm{E}[\,W_k^4\,]$ で上から押さえて，$X_i^2 = 1$ と $\{X_i\}$ の独立性を用いてあからさまに計算することで，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\,|W_k| \geqq \epsilon k\,] &\leqq (\epsilon k)^{-4}\mathrm{E}[\,W_k^4\,] \\
&= (\epsilon k)^{-4} \sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\sum_{i_3=1}^{k}\sum_{i_4=1}^{k} \mathrm{E}[\,X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\,] \\
&= (\epsilon k)^{-4}\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}[\,X_i^4\,] + 3\sum_{1\leqq i,j\leqq k;\ i\neq j}\mathrm{E}[\,X_i^2\,]\mathrm{E}[\,X_j^2\,]\right) \\
&= (\epsilon k)^{-4}(k + 3k(k-1)).
\end{aligned}$$

右辺は $k \in \mathbb{N}$ について和（級数）をとったとき収束するので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}[\,\frac{1}{k}|W_k| \geqq \epsilon\,] < \infty.$$

よってボレル・カンテリの第 1 定理（定理 F.9）からほとんど全ての $w \in \Omega$ に対して，ある $k_0(w)$ 以降の k について $\left|\frac{1}{k}W_k(w)\right| \leqq \epsilon$ となる．これが任意の ϵ に対して成り立つから，ほとんど全ての $w \in \Omega$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}W_k(w) = 0$$

が成り立つ． □

注 F.19　定理 F.17 と定理 F.18 の違いは何次のモーメント $\mathrm{E}[\,|X_1|^p\,]$ の存在（有限）まで仮定するかである．仮定を弱くした場合に証明が長くなるのは，強い仮定をおけば「ほとんど全ての $w \in \Omega$」を一気に考える証明が可能だが，そうでなければ w に関する条件付け（場合分け）を要するからである．後者はマルチンゲール等の興味深い性質に関連している． ◇

参　考　文　献

文献表は，本書の内容に関連の深い初学者向けの教科書と本書で引用した原著論文に分けて掲げる．

前者は本文で直接引用していないものも含めて，主に本書の第 I 部のそれぞれの題材をさらに深く勉強する際の「次の 1 冊」ということを意識して選び，おおむね分野分類に従って並べた．「そのさらに次の 1 冊」については各教科書の巻末文献等を参照していただきたい．

後者については引用したものに限った．原著論文の引用の慣例に従って，著者名順（第 1 著者の姓，第 1 著者の名，第 2 著者，...，公表年，に従った辞書式順序）に並べてある．内容等の手がかりは各論文の引用箇所で確認していただきたい．

教　科　書

[T1] 熊谷 隆，確率論，共立出版（新しい解析学の流れ），2003.

本書と同じシリーズから出ている確率論の基礎教科書．同書の一つの特徴である第 3 章の電気回路とランダムウォークは，本書の §3.4 および §7.2 と密接に関連している．

和書の確率論の初等的あるいは基礎的な教科書は 1990 年前後から増え始め，かつての [T2] のような決定版の教科書が少数あって事足りた時代と比べると，著者の方々の専門を背景にした多様な視点の基礎教科書が出ている．紹介しきれなかった教科書は同書の参考文献を参照していただきたい．

[T2] 西尾 真喜子，確率論，実教出版，1978.

[T3] とともに 20 世紀後半の四半世紀近くの間測度論に基づく確率論の和書の初学者向け本格的教科書の代表であった．ていねいに書かれている．

[T3] 伊藤 清，確率論，岩波書店（基礎数学選書），1991.

3 分冊の岩波講座として長く親しまれた．[T2] ともに測度論に基づく確率論の和書の代表的な本格的教科書．いまでも勉強になるものが証明の随所にあるが，絶版はたいへん残念．

[T4] 樋口 保成，パーコレーション——ちょっと変わった確率論入門，遊星社，1992.

統計力学の臨界現象に関する確率論という広い意味で本書と共通する視点から書かれた確率論の初学者向け教科書．パーコレーションは本書では触れなかった話題で，そこに特有の部分は読みこなすのに腕力が必要だが，数理物理学の

一つの話題を覗き窓にして確率論を初学者向けに講義するという特色は成功していて，一読に値する．

[T5] R. Durrett, *Probability: Theory and examples,* 2nd ed., Wadsworth, 1996.

英語の確率論の本格的現代的教科書の 1 冊．基礎から始めてブラウン運動までカバーする詳しい教科書．

[T6] 伊藤 清三，ルベーグ積分入門，裳華房（数学選書 4），1963.

20 世紀以降の確率論は測度論（ルベーグ積分論）に立脚することで飛躍的に進歩した．Path の集合上の確率論に測度論が不可避であることは本書でも §2.1 でかいま見た通りである．同書は測度論の初学者向け基礎教科書の代表的な 1 冊．

[T7] H. Lebesgue, 積分・長さおよび面積，吉田・松原訳，共立出版（現代数学の系譜 3），原著 1902.

測度論の創始者の解説論文の和訳．本書の補遺 §F で引用した．

[T8] 新井 仁之，ルベーグ積分講義，日本評論社，2003.

最近のルベーグ積分の初学者向けの教科書．初等的な講義スタイルのやさしい筆遣いながら，ルベーグの可測性（[T7] 参照）とカラテオドリの可測性（[T6] 参照）の同値性など，測度という概念の基礎がていねいに書かれている．面積 0 の集合やハウスドルフ次元などの（狭い意味の）ルベーグ測度でつかみきれない集合に関する章も特徴である．

[T9] 小針 晛宏，確率・統計入門，岩波書店，1973.

統計学の基礎教科書だが，$\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークについて，本書 §1.5 で紹介したような内容をていねいに初等的に証明している．

[T10] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications,* vol. 1, 2, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1968.

W. Feller, 確率論とその応用，1 上・下，2 上・下，卜部舜一訳，紀伊国屋書店．

20 世紀中頃の確率論の定番の教科書の 1 冊．盛りだくさんの内容．影響力の大きい教科書．ランダムウォークの取り扱いにも詳しい．

[T11] F. Spitzer, *Principles of random walk,* 2nd ed., Springer, Graduate texts in mathematics 34, 1976.

和書の確率論の本格的な教科書でランダムウォークを表看板に掲げているものは著者の認識不足か少ないように思うが，洋書には有名なものがある．同書はその 1 冊．Path 上の確率測度を後回しにして，遷移確率に相当する関数を先に定義する独特の導入で，解析的な側面を強調している．

[T12] G. F. Lawler, *Intersections of random walks,* Birkhäuser, 1996.

ランダムウォークを表看板に掲げている最近の教科書の 1 冊．局所中心極限定理などに始まる詳細な性質を紹介している．

ランダムウォークの交差確率は self-avoiding path との関連で重要であることを本書では詳しく紹介しなかった．同書は表題の通り，交差確率について詳しく書いてあり，また，self-avoiding path についても紹介している．

[T13] S. Karlin, 確率過程講義，佐藤 健一，佐藤 由身子訳，産業図書（数理解析とその周辺 3），原著 1969.

マルコフ連鎖の教科書はたいへん多いが，そのうちの代表的な入門書の 1 冊．

[T14] G. F. Lawler, *Introduction to stochastic processes,* Chapman & Hall, 1995.

マルコフ連鎖を中心に，その連続極限としてのブラウン運動や確率積分の入門までの教科書．

[T15] N. Madras, G. Slade, *The Self-Avoiding Walk,* Birkhäuser, 1993.

$\mathbb{Z}^n$ 上の self-avoiding walk の数学および数理物理学に関する専門的教科書．Lace 展開のその後の発展と他のモデルへの適用，特に連続極限に関する結果，については次の講義録が出版される予定とのことである：

G. Slade, *The lace expansion and its applications*, Saint-Flour Summer School on Probability lecture notes, 2004, to appear.

`http://www.math.ubc.ca/~slade/`

[T16] 高橋 陽一郎，漸近挙動入門——太鼓の形を聴くために，日本評論社，2002 年．

本書では特にマルコフ性のない確率連鎖の漸近的性質を解析するという問題意識を掲げたが，同書はそのマルコフ連鎖（特にランダムウォークとブラウン運動）における対応する問題が初等的な教科書の範囲で扱われている．ランダムウォークの再帰性やタウバー型定理の節は重なる部分がある一方，対応する微分演算子の固有値などの，マルコフ性があるゆえに可能な解析的手法を扱う点で本書と相補的でもある．

[T17] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random walks and electric networks,* Carus monograph, The Mathematical Association of America, 1984.

§3.4 および §7.2 で紹介した電気抵抗回路とランダムウォークの関係についての詳しい専門的教科書．

[T18] K. Falconer, *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications,* Wiley, 1990.

K. Falconer, フラクタル幾何学，服部 久美子，村井 浄信訳，共立出版（新しい解析学の流れ），近刊．

フラクタルの数学に関する代表的な基礎教科書．

[T19] Ya. G. Sinai, *Theory of phase transition: rigorous results,* Pergamon Press, 1982.

本書では全く触れなかったがくりこみ群の発祥の地はスピン系の統計力学における臨界現象と呼ばれる研究対象である．その分野においてくりこみ群が厳密

に追跡できるモデル (hierarchical model) を解説した専門的教科書．くりこみ群の数学をやる上で必ず手に取ることになる教科書．

[T20] K. G. Wilson, J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion,* Physics Reports **12** (1974) 75–200.
理論物理学におけるくりこみ群の理論の総合報告の一つ．くりこみ群という分野を確立した金字塔的論文．

[T21] 田崎 晴明，熱力学，培風館（新物理シリーズ），2000.
理論物理学の分野である熱力学の基礎教科書．本書では §A.1 でルジャンドル変換の説明を引用した．

[T22] 久保 亮五編，大学演習熱学・統計力学，裳華房．初版は 1961 年だが版を重ね，今は復刻版になっている．
理論物理学の分野である統計力学の長く代表的であった基礎教科書．本書の §4.1.4, §4.2.2, §4.3.1, §A.3 など，いくつかの場所で統計力学の基礎用語を引用した．

[T23] 宮下 精二，熱・統計力学，培風館，1993.
本書で path の漸近形の指数について議論したが，スピン系では臨界現象における臨界指数に対応する．本書では両者の対応を全く議論しなかったが，そこに共通する性質こそがくりこみ群の目標である．[T22] では臨界現象への言及が少ないのは時代的にやむを得ないが，スピン系の平衡系統形力学の相転移や臨界現象について補充する必要がある．新しい本の中の 1 冊として挙げておく．

[T24] 田崎 晴明，原 隆，相転移と臨界現象の数理，共立出版（現代数学の潮流），近刊．
$\mathbb{Z}^n$ 上のイジング模型に絞って厳密な定義を行い．相転移や臨界現象の存在を証明している．本書の主題の path の漸近形に対応するのがスピン系における臨界現象の指数である．そのために必要な定式化を勉強することができる．[T22, T23] などで統計力学の基礎を勉強してあることが望ましいと思う．

[T25] 辻 正次，複素関数論，第 7 版，槇書店，1985.
複素関数論の詳しい基礎教科書．本書第 II 部のいくつかの定理を §B.1, §D.3 で証明する際に引用した．

[T26] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems,* Academic Press, London, 1980.
力学系の教科書．本書第 II 部の定理を §D.3 で証明する際に引用した．

引　用　論　文

[1] M. T. Barlow, *Random walks, electrical resistance, and nested fractals,* in K. D. Elworthy, N. Ikeda (eds.), *Asymptotic Problems in Probability Theory: stochastic models and diffusions on fractals,* Pitman, 1993, pp131–157.

[2] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Local times for Brownian motion on the Sierpiński carpet,* Probability Theory and Related Fields **85** (1990) 91–104.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, *Transition densities for Brownian motion on the Sierpiński carpet,* Probability Theory and Related Fields **91** (1992) 307–330.

[4] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Restoration of isotropy on fractals,* Physical Review Letters **75** (1995) 3042–3045.

[5] M. T. Barlow, K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Weak homogenization of anisotropic diffusion on pre-Sierpiński carpet,* Communications in Mathematical Physics **188** (1997) 1–28.

[6] E. Bolthausen, C. Ritzmann, *A central limit theorem for convolution equations and weakly self-avoiding walks*, Annals of Probability, to appear.

[7] D. C. Brydges, T. Spencer, *Self-avoiding walk in 5 or more dimensions,* Communications in Mathematical Physics **97** (1985) 125–148.

[8] F. J. Dyson, *Exisitence of a phase–transision in a one–dimensional Ising ferromagnet,* Communications in Mathematical Physics **12** (1969) 91–107.

[9] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Triviality of* ϕ_4^4 *and all that in a hierarchical model approximation,* Journal of Statistical Physics **29** (1982) 683–699.

[10] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Non-Gaussian fixed points of the block spin transformation. Hierarchical model approximation,* Communications in Mathematical Physics **89** (1983) 191–220.

[11] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Nongaussian scaling limits. Hierarchical model approximation,* Journal of Statistical Physics **35** (1984) 267–284.

[12] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Asymptotic freedom beyond perturbation theory,* in K. Osterwalder and R. Stora eds., *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories,* Les Houches 1984, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[13] K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Massless lattice* ϕ_4^4 *Theory: Rigorous control of a remormalizable asymptotically free model,* Communications in Mathematical Physics **99** (1985) 199–252.

[14] B. Hambly, K. Hattori, T. Hattori, *Self-repelling walk on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **124** (2002) 1–25.

[15] B. M. Hambly, T. Kumagai, *Heat kernel estimates and homogenization for asymptotically lower dimensional processes on some nested fractals,* Potential Analysis **8** (1998) 359–397.

[16] B. Hambly, T. Kumagai, *Transition density estimates for diffusion processes on p.c.f. self-similar fractals,* Journal of London Mathematical Society (3) **78** (1999) 431–458.

[17] T. Hara, T. Hattori, H. Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions,* Communications in Mathematical Physics **220** (2001) 13–40.

[18] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions, I, the critical behaviour,* Communications in Mathematical Physics **147** (1992) 101–136.

[19] T. Hara, G. Slade, *The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions,* Reviews in Mathematical Physics **4** (1992) 235–327.

[20] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding walk and percolation critical points in high dimensions,* Combinatrics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[21] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **88** (1991) 405–428.

[22] K. Hattori, T. Hattori, *Displacement exponents of self-repelling walks and self-attracting walks on the pre-Sierpiński gasket and on integers,* preprint (2003).

[23] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **84** (1990) 1–26.

[24] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[25] K. Hattori, T. Hattori, H. Watanabe, *Asymptotically one-dimensional diffusions on the Sierpiński gasket and the abc-gaskets,* Probability Theory and Related Fields **100** (1994) 85–116.

[26] T. Hattori, *Asymptotically one-dimensional diffusions on scale-irregular gaskets,* Journal of Mathematical Science University of Tokyo **4** (1997) 229–278.

[27] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probability Theory and Related Fields **93** (1992) 273–284.

[28] T. Hattori, H. Nakajima, *Transition density of diffusion on the Sierpiński gasket and extension of Flory's formula,* Physical Review E **52** (1995) 1202–1205.

[29] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpiński gaskets,* Journal of Statistical Physics **109** (2002) 39–66.

[30] T. Hattori, T. Tsuda, *Renormalization group analysis of the self-avoiding paths on the d-dimensional Sierpiński gaskets,* MP-ARC preprint archive (2002) **02–225**,

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/`.

[31] T. Hattori, H. Watanabe, *Anisotropic random walks and the asymptotically one-dimensional diffusions on the abc-gaskets,* Journal of Statistical Physics **88** (1997) 105–128.

[32] Y. Kasahara, *Tauberian theorems of exponential type,* Journal of Mathematics of Kyoto University **18-2** (1978) 209–219.

[33] Y. Kasahara, N. Kosugi, *Remarks on Tauberian theorem of exponential type and Frenchel-Legendre transform,* Osaka Journal of Mathematics **39** (2002) 613–619.

[34] F. B. Knight, *On the random walk and Brownian motion,* Transactions in American Mathematics **103** (1962) 218–228.

[35] N. Kosugi, *Tauberian theorem of exponential type on limits of oscillation,* Journal of Mathematics of Kyoto University **39** (1999) 783–792.

[36] N. Kosugi, *Tauberian theorem of exponential type and its application to multiple convolution,* Journal of Mathematics of Kyoto University **39** (1999) 331–346, Errata, ibid **40** (2000) 203.

[37] G. Lawler, O. Schramm, W. Werner, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees,* `http://arxiv.org/abs/math.PR/0112234`, Annals of Probability, to appear.

[38] G. Slade, *The diffusion of self-avoiding random walk in high dimensions,* Communications in Mathematical Physics **110** (1987) 661–683.

[39] W. Werner, *Notes of the lectures delivered at the Saint-Flour summer school (July 2002),* `http://arxiv.org/abs/math.PR/0303354`, Springer Lecture Notes, to appear.

[40] W. Werner, *Conformal restriction and related questions,* `http://arxiv.org/abs/math.PR/0307353`.

索　　引

〈著者紹介〉

服部　哲弥（はっとり　てつや）

1985年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
現　在　東北大学大学院理学研究科教授
　　　　理学博士
専　攻　数理物理学，確率論

新しい解析学の流れ
ランダムウォークとくりこみ群
—確率論から数理物理学へ—

2004年8月10日　初版1刷発行

著　者　服部哲弥　©2004
発行者　南條光章
発　行　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話（03）3947-2511番（代表）
郵便番号112-8700
振替口座00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　日経印刷
製　本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC　417.1, 421.5

ISBN 4-320-01733-1

Printed in Japan